STATIK

Forelæsninger

holdte ved den polytekniske Læreanstalt

af

Julius Petersen

Anden Udgave

Kjøbenhavn

Andr. Fred. Høst & Søns Forlag

1903

Kjøbenhavn. — Græbes Bogtrykkeri.

INDLEDNING.

1. Kraftbegrebet. Dersom et Legeme ikke paavirkes udenfra og er i Hvile, vil det vedblive at være i Hvile; dersom det bevæger sig, vil det vedblive at bevæge sig med uforandret Hastighed og i uforandret Retning. Denne Sætning kaldes Inertiens Lov. Dens Rigtighed kan ikke direkte paavises ved Forsøg, da der altid findes en Paavirkning udenfra (Luftens Modstand, Gnidning, Tyngdens Virkning o. s. v.), men den kan godtgøres indirekte ved Forsøg, idet den ydre Paavirkning dels saavidt muligt fjernes, dels tages med i Beregning.

Dersom et Legeme gaar over fra Hvile til Bevægelse eller dersom dets Bevægelses Hastighed eller Retning forandres, maa Legemet derfor være paavirket udenfra. De ydre Aarsager, der forandre et Legemes Bevægelsestilstand, kaldes Kræfter. Et Legeme kan dog ogsaa være paavirket af Kræfter, uagtet dets Bevægelsestilstand ikke forandres, idet det kan være underkastet flere Paavirkninger, som, hvis de virkede hver for sig, vilde forandre Bevægelsestilstanden, men som, idet de virke samtidig, tilintetgøre hinandens Virkninger. Et saadant System af Kræfter siges at være i Ligevægt. Undertiden siger man ogsaa i dette Tilfælde, at Legemet er i Ligevægt.

2. En Kraft, der har samme Indflydelse paa et Legemes Bevægelse som flere andre, der virke samtidig, kaldes disses Resultant, medens de andre kaldes Komposanterne. At erstatte flere Kræfter ved deres Resultant kaldes at sammensætte dem; at erstatte en Kraft ved flere andre, kaldes at opløse den.

3. Tyngdekraften. Erfaring viser, at ethvert Legeme, der ikke understøttes, falder imod Jordens Centrum med stadig voxende Hastighed. Den ubekendte Aarsag hertil kaldes Tyngdekraften. Vi kunne ikke paavise, ad hvilke Veje Paavirkningen foregaar, men vi have ved Forsøg lært at kende Virkningen saaledes, at vi i alle Tilfælde kunne bestemme Tyngdens Indflydelse paa et Legemes Bevægelsestilstand.

En Linie, der gaar til Jordens Centrum, kaldes lodret; en derpaa vinkelret Plan kaldes vandret. Da Jordens Radius er omtrent 860 Mil, kunne vi anse lodrette Linier for parallele, naar de udgaa fra Punkter paa Jordens Overflade, der ligge nær ved hverandre.

Dersom man fastgør et Legeme i den nederste Ende af en lodret, ustrækkelig Snor, hvis øverste Ende er gjort fast, hindres det i at falde. Tyngdekraften foraarsager da, at Legemet udøver et Træk i Snoren, som kan iagttages, naar man fæster Snorens øverste Ende til en Fjeder, som ved Trækket kan sammentrykkes i Snorens Retning. Dette Træk kaldes Legemets Vægt. Vi forudsætte, at Snorens egen Vægt er saa lille, at den kan lades ude af Betragtning. To Legemer siges at have samme Vægt, naar de sammentrykke Fjedren lige meget. Forsøg vise, at et Legemes Vægt ikke forandres, selv om Ordningen af Legemets Dele forandres, og at Vægten, naar Legemet beholder sin Plads, ikke afhænger af Snorens Længde. Vægten

forandres, naar Legemets Afstand fra Jordens Centrum forandres; for smaa Forandringer i denne Afstand kunne vi dog betragte Vægten som konstant.

4. Som Enhed for Vægt bruge vi Kilogrammet, det vil sige Vægten af en Kubikdecimeter Vand ved dets største Tæthed. At et Legeme vejer n Kilogram, vil altsaa sige, at det sammentrykker Fjedren lige saa meget, som om n Vægtenheder Vand vare ophængte i Snoren.

Det anvendte Apparat kan benyttes som Vejeapparat, naar Fjedren forsynes med en Viser, der paa en Maalestok angiver det Antal Vægtenheder, der svare til Viserens forskellige Stillinger. Et saadant Apparat kaldes et Dynamometer.

5. Ved Dynamometret have vi et Eksempel paa Ligevægt. Dersom Snoren blev klippet over, vilde Tyngdekraften drage Legemet lodret nedefter; dersom Tyngdekraften pludselig ophørte at virke, vilde Fjedren udvide sig og derved trække Legemet lodret opefter. De to Kræfter virke imidlertid samtidig og ere i Ligevægt, naar Viseren er kommen i Ro.

6. En Krafts Retning er den Retning, i hvilken den vilde bevæge det Legeme, som den virker paa, dersom Bevægelsen ikke hindredes. Tyngdekraftens Retning er altsaa lodret nedefter, medens Retningen af en Fjederkraft, der holder en Snor spændt, angives ved Snorens Retning (henimod Fjedren).

7. Man indser let, at to ens og lige meget sammentrykte Fjedre, som virke hver i sit Endepunkt af en Snor i Snorens Retning, men modsat hinanden, ikke kunne bevæge Snoren. De to lige store, men modsatte, Kræfter, der her holde hinanden i Ligevægt, maa begge stræbe at forlænge Snoren, men sætte vi i Snorens Sted en tynd

Stang, der ikke kan sammentrykkes, kunne Kræfterne ogsaa stræbe at sammentrykke Stangen, uden at Ligevægten forstyrres.

Da Ligevægten er uafhængig af Stangens eller Snorens Længde, kan man borttage et Stykke af Stangen eller Snoren; enhver Del udøver derfor et Tryk paa eller et Træk i Nabodelene, lige saa stort, som om Fjedren virkede paa Nabodelene; man siger derfor, at der, i ethvert Punkt af Stangen eller Snoren, er en Spænding, hvis Størrelse er det Antal Kilogram, som Viseren paa en af Fjedrene angiver.

Det Punkt, hvor Fjedren virker, kaldes Kraftens Angrebspunkt; man kan altsaa, uden at Ligevægten forstyrres, flytte Angrebspunktet til ethvert Punkt i Kraftens Retning, der er fast forbundet med det oprindelige Angrebspunkt, naar forresten Kraftens Størrelse og Retning bliver uforandret.

8. Kræfters Udmaaling. Dersom en hvilken som helst Kraft virker paa et Legeme, der er saa lille, at vi kunne betragte det som et Punkt (Kraftens Angrebspunkt), vil Punktet bevæge sig i en vis Retning. Forbinde vi nu Punktet med et fast Punkt ved en Snor, hvis Retning falder sammen med den, i hvilken Punktet vil bevæge sig, men som gaar til den modsatte Side, maa Punktet blive i Hvile, og Snoren faar en vis Spænding. Kraften, hvilken dens Natur end er, virker derfor ganske paa samme Maade som en Snor, der udgaar fra Angrebspunktet i en bestemt Retning, og som har en vis Spænding. Vi kunne derfor altid tænke os de virkende Kræfter erstattede ved saadanne Snore, og Kraften vil blive tilstrækkelig bestemt, naar vi angive dens Angrebspunkt, dens Retning (Snorens Retning og dens Størrelse (Størrelsen af Spændingen i Snoren, maalt i Kilogram). Enhver Kraft er derfor fuldstændig bestemt ved en ret Linie, som afsættes ud fra Angrebspunktet i Kraftens Retning, og hvis Længde angiver Kraftens Størrelse, idet vi lade en vis vilkaarlig valgt Længde repræsentere et Kilogram.

Lad Angrebspunktet være A og Linien AB repræsentere Kraften; paa Linien gennem A og B vælge vi en positiv Retning; vi regne da Kraften positiv eller negativ, eftersom AB er positiv eller negativ.

9. Samtidig virkende Kræfter. Om samtidig virkende Kræfter forudsætte vi, at de ere uafhængige af hverandre. Vi ville nærmere vise, hvad vi mene hermed.

Lad os antage, at flere Kræfter virke paa et lille Legeme, alle i samme Linie, og at vi holde det lille Legeme i Hvile ved Hjælp af en Snor. Lad de enkelte Kræfters Størrelser (positive eller negative), maalte, idet de virke een ad Gangen, være henholdsvis a, b, c, . . . Vi sige da, at Kræfterne ere uafhængige af hinanden, naar de, idet de alle virke samtidig, have en Resultant, der ligger i samme rette Linie som de givne, og hvis Størrelse er $a+b+c$ . . . Vi kunne ikke bevise, at dette maa blive Tilfældet, thi det modsatte kan godt finde Sted. Udgaa Kræfterne f. Eks. fra to samlede Magneter, tør vi, da Magneterne paavirke hinanden, ikke slutte, at de samlede Magneter udøve en Tiltrækning, der er Summen af de Tiltrækninger, som de hver for sig vilde udøve.

10. Vi maa gøre endnu en Indskrænkning i vor oprindelige Definition af Begrebet Kraft. Dersom det Legeme, som, paavirket af ydre Aarsager, sættes i Bevægelse, kan betragtes som et Punkt, kan Bevægelsesaarsagen erstattes ved en Snor med en vis Spænding; har Legemet derimod endelige Dimensjoner, er dette kun undtagelsesvis Tilfældet;

vi ville senere vise, at Bevægelsesaarsagerne i saa Fald kunne erstattes ved flere paa forskjellige Punkter af Legemet virkende, spændte Snore; man maa altsaa sige, at Legemet i saa Fald paavirkes af et System af Kræfter.

11. Læren om Forholdet mellem Legemernes Bevægelser og de virkende Kræfter støtter sig paa nogle faa Erfaringssætninger, men er forresten en ren matematisk Videnskab, der kaldes den rationelle Mekanik. Den inddeles i Statiken eller Ligevægtslæren og Dynamiken, den egentlige Bevægelseslære. Dynamiken indledes ved Kinematiken, der beskriver de sammensatte Bevægelser rent geometrisk (uden Hensyn til Bevægelsens Aarsager) paa den simplest mulige Maade.

FØRSTE KAPITEL.

Kræfter, der angribe samme Punkt.

Grundprinciper.

12. Grundlaget for Statiken findes i følgende Sætninger:

I. En Kraft er bestemt ved Størrelsen og Retningen af en fra Angrebspunktet afsat ret Linie. Angrebspunktet kan forskydes i Kraftens Retning til et hvilket som helst dermed fast forbundet Punkt.

II. Flere Kræfter, der virke i samme rette Linie, kunne erstattes ved een, der er lig deres algebraiske Sum, og som ligger i samme Linie, og omvendt.

Ere de givne Kræfter P_1, P_2, . . . P_n, Resultanten R, har man altsaa:

$$R = P_1 + P_2 \ldots + P_n. \qquad (1)$$

III. Et System af Kræfter med fælles Angrebspunkt har altid een og kun een Resultant, og dennes Størrelse og Retning er kun afhængig af Komposanternes Størrelser og Retninger. Dens Angrebspunkt er det samme som Komposanternes.

IV. Til hvilke som helst paa et Legeme virkende Kræfter kan føjes Kræfter, som indbyrdes holde hinanden i Ligevægt, og hvis Angrebspunkter ere fast forbundne med Legemet.

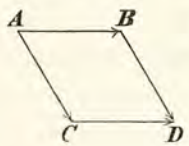
Man maa her mærke sig, at en saadan Tilføjelse vel ikke har nogen Indflydelse paa Legemets Bevægelsestilstand, men vel paa de indre Tryk og Spændinger. Disse tage vi ikke her i Betragtning, da vi forudsætte, at Legemet er absolut fast.

V. De geometriske Forbindelser, der ere mellem de virkende Kræfters Angrebspunkter, kunne tænkes erstattede ved hvilke som helst andre, der ikke forandre Afhængigheden mellem de Bevægelser, som Punkterne kunne faa (uden Hensyn til Kræfterne).

Denne Sætning, der ikke som de andre tjener som nærmere Definition af Kraftbegrebet, maa betragtes som en Erfaringssætning, og det, at de mange ved dens Hjælp udledte Sætninger ere fundne stemmende med Iagttagelser, maa betragtes som et tilstrækkeligt Bevis for dens Rigtighed.

Kræfter, der virke paa et frit Punkt.

13. Kræfternes Parallelogram. Lad AB og AC være to lige store Kræfter, $ABDC$ en Rhombe. Man kan da flytte AB til CD, naar man samtdig flytter AC til BD.

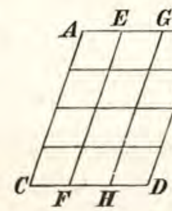


AB og AC have nemlig en Resultant (III); denne maa falde ud ad AD; thi den kan ikke forandres, naar Figuren bringes til at dække sig selv ved Drejning om AD. Tilføje vi de fire Kræfter i Ligevægt DB, DC, BD og CD, vil Resultanten af de to første paa Grund af Symmetrien hæve Resultanten af de to givne Kræfter. Tilbage have vi da BD og CD.

Vi gøre her een Gang for alle den Bemærkning, at

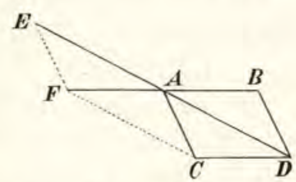
tilføjede ny Angrebspunkter altid tænkes fast forbundne med de gamle Angrebspunkter.

14. Resultanten af to Kræfter AB og AC er Diagonalen AD i Parallelogrammet $ABDC$ (Kræfternes Parallelogram). Lad AB og AC have et fælles Maal a, saa at $AB = p \, . \, a$, $AC = q \, . \, a$. Ved Paralleler deles Parallelogrammet AD i Rhomber med Siden a. Ifølge 13 kan nu AE ved q Forskydninger bringes ned til Stillingen CF, idet vi for hvert Trin, vi rykke ned, flytte en af AC's Dele over paa EF. De to givne Kræfter ere nu erstattede ved de tre: CF, EF og EB. Paa samme Maade flyttes EG til FH, hvorved EF gaar til GH; fortsætte vi saaledes, have vi omsider hele AB flyttet til CD, og AC vil da være flyttet til BD. Resultanten af CD og BD gaar gennem D; altsaa gaar ogsaa Resultanten af AB og AC gennem D.



Vi have saaledes bevist, at Resultantens Retning falder sammen med Retningen af Diagonalen i Kræfternes Parallelogram. Beviset udvides paa sædvanlig Maade til ogsaa at gælde, naar Kræfterne ere inkommensurable.

For at finde Resultantens Størrelse, afsætte vi AE lig og modsat Resultanten, AF lig og modsat AB. AB, AE og AC ere da i Ligevægt, og AF er derfor Resultant af AE og AC. F maa derfor ligge paa Diagonalen af det ved AC og AE bestemte Parallelogram. Deraf følger $AE = CF = DA$. Resultanten er



altsaa i Størrelse lig Diagonalen i Kræfternes Parallelogram.

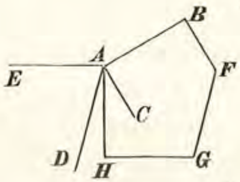
Lad Kræfterne være P og Q, Resultanten R, og lad os vælge en positiv Omløbsretning i Planen. Ifølge bekendte Formler har man da:

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(PQ), \\ \frac{R}{\sin(PQ)} &= \frac{P}{\sin(QR)} = \frac{Q}{\sin(RP)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Dersom (PQ) er ret, bliver

$$R^2 = P^2 + Q^2; \; P = R\cos(PR); \; Q = R\cos(QR). \qquad (3)$$

15. Kræfternes Polygon. Dersom flere Kræfter AB, AC, AD . . . . angribe Punktet A, kan man først sammensætte to, derpaa disses Resultant og en tredje o. s. v. Dette sker, naar man trækker $BF \;\underline{\underline{\neq}}\; AC$, $FG \;\underline{\underline{\neq}}\; AD$ . . .; kommer man derved tilsidst til Punktet H, er AH den søgte Resultant. Dersom H falder i A, er Resultanten Nul.



Kræfter med samme Angrebspunkt ere derfor i Ligevægt, naar Kræfternes Polygon lukker sig, og omvendt.

Specielt mærkes, at Resultanten af tre Kræfter er Diagonal i det ved Kræfterne bestemte Parallelepipedum.

16. Projiceres A, B, F . . . paa en vilkaarlig Linie i Punkterne A_1, B_1, F_1, . . . er

$$A_1B_1 + B_1F_1 + \ldots + H_1A_1 = 0.$$

Dersom hvilke som helst paa eet Punkt virkende Kræfter ere i Ligevægt, er Summen af Kræfternes Projektioner paa en vilkaarlig Linie derfor Nul.

Dersom Summen af Projektionerne er Nul, maa paa den anden Side H falde i A, dersom den Linie, som man projicerer paa, ikke er vinkelret paa AH. Da nu en Linie ikke kan være vinkelret paa tre fra et Punkt udgaaende Linier, som ikke ligge i samme Plan, maa Kræfterne være i Ligevægt, dersom deres Projektioner paa de tre Akser af et retvinklet eller skævvinklet Koordinatsystem have Summen Nul.

Betegne vi Kræfterne ved P, deres Vinkler med Akserne ved α, β og γ, idet vi adskille de forskellige Kræfter ved Indices, blive altsaa de nødvendige og tilstrækkelige Ligevægtsbetingelser:

$$\left.\begin{aligned} P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots &= 0, \\ P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots &= 0, \\ P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + \ldots &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

17. Vi ville særlig betragte et retvinklet Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i A. Enhver Kraft AB kan opløses i tre andre, der falde paa Akserne, og som blive Kanter i et retvinklet Parallelepipedum, hvis Diagonal er AB. P opløses derved i tre Komposanter

$$P\cos\alpha,\; P\cos\beta,\; P\cos\gamma.$$

Opløses alle Kræfterne paa denne Maade, og sammensættes de, der falde paa den samme Akse, faas de givne Kræfter erstattede ved tre, der falde paa Akserne, nemlig

$$A = \Sigma P\cos\alpha, \quad B = \Sigma P\cos\beta, \quad C = \Sigma P\cos\gamma; \qquad (5)$$

disse kunne atter sammensættes til en Resultant R, der er Diagonal i det ved A, B og C bestemte Parallelepipedum, og som altsaa i Størrelse og Retning bestemmes ved

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}; \; \cos a = \frac{A}{R}; \; \cos b = \frac{B}{R}; \; \cos c = \frac{C}{R}, \qquad (6)$$

hvor a, b, c ere Resultantens Vinkler med Akserne. Ere

Kræfterne i Ligevægt, maa man have $R = 0$, der medfører $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, de samme Betingelser, som vi fandt ovenfor. De tre sidste Ligninger (6) vise, at Resultantens Projektion paa en vilkaarlig Linie er lig Summen af Komposanternes Projektioner paa samme Linie.

Kvadrerer og adderer man de tre Ligninger (5), og erindrer man, at man for et retvinklet System har

$$\cos^2\alpha_p + \cos^2\beta_p + \cos^2\gamma_p = 1;$$
$$\cos\alpha_p \cos\alpha_q + \cos\beta_p \cos\beta_q + \cos\gamma_p \cos\gamma_q = \cos(P_p P_q),$$

faar man

$$R^2 = \Sigma P_p^2 + 2\Sigma P_p P_q \cos(P_p P_q). \qquad (7)$$

Anvendelser.

1. En Vægt P paa et Kilogram hænger i en Snor; fra et Punkt C af denne udgaa to Snore, hvis Længder ere 3 og 4, til de to faste Punkter A og B, der ligge paa samme Horizontal i en Afstand fra hinanden af 5. Find Spændingen i Snorene.

Paa Punktet C virke tre Kræffer, der holde hinanden i Ligevægt, og hvis Størrelser ere Spændingerne i de tre Snore. $\angle ACB$ er ret, CB og CA danne med den lodrette Vinkler, hvis sin. ere 0,8 og 0,6; man har altsaa, idet de to Spændinger betegnes ved X og Y,

$$X : Y : P = 3 : 4 : 5.$$

Spændingen i CB bliver derfor 0,6, i CA 0,8 Kilog.

2. I en Trekant ABC er O Medianernes Skæringspunkt; bevis, at tre Kræfter OA, OB og OC ere i Ligevægt.

3. Et Punkt O tiltrækkes af de enkelte Elementer af en tynd Stang AB med en Kraft, der er proportional med

Elementets Længde og omvendt proportional med Afstandens Kvadrat. En Cirkelbue med Centrum O rører AB og begrænses af OA og OB; dens Elementer tiltrække O efter samme Lov som AB. Bevis, at Buen og AB udøve samme Tiltrækning paa O.

Lad to Linier fra O, der danne en uendelig lille Vinkel $d\theta$, afskære Elementerne ds og db af Stangen og Buen, med Afstandene r og a fra O. Tiltrækningerne af disse Elementer ere da, idet k er en Konstant, henholdsvis

$$\frac{kds}{r^2} \text{ og } \frac{kdb}{a^2},$$

der ere lige store, da $db = ad\theta$, og man ved paa dobbelt Maade at udtrykke Arealet af den lille Trekant med Grundlinien ds faar $r^2 d\theta = ads$. Da saaledes de to Elementer udøve ligestore Tiltrækninger, maa ogsaa hele Buen udøve samme Tiltrækning som AB.

4. De vinkelrette fra en Trekants omskrevne Cirkels Centrum paa Siderne repræsentere Kræfter med Angrebspunktet i Centrum. Bestem disse Kræfters Resultant.

5. Resultanten af to Kræfter er 20 kg.; den ene Kraft er 10 kg. og den anden danner en Vinkel paa 30^0 med Resultanten. Find den anden Kraft og de to Komposanters Vinkel.

6. Tre Kræfter virke langs med Højderne af en Trekant (mod Vinkelspidserne) og ere proportionale med de tilsvarende Grundlinier. Bevis, at de tre Kræfter ere i Ligevægt.

7, Den ene af to Kræfter er afsat tilligemed Resultantens Retning. Hvilket er det geometriske Sted for den anden Krafts Endepunkt?

8. En Partikel med Vægt V er ophængt i en Snor med Længden l. Den frastødes af en lodret Stang gen-

nem Ophængningspunktet med en Kraft, som er omvendt proportional med Afstanden fra Stangen, og som er lig V, naar Afstanden er l. Find Ligevægtsstillingen óg Spændingen i Snoren.

9. Tre Kræfter repræsenteres af tre paa hverandre vinkelrette Korder, udgaaende fra samme Punkt i en Kugleflade. Bevis, at Resultanten gaar gennem Centrum.

10. En Partikel med Vægten V er ophængt ved en Snor med Længeen l i et fast Punkt A og tiltrækkes af et andet Punkt B i samme Højde som A med en given Kraft K. Find Ligevægtsstillingen og Spændingen i Snoren, naar $AB = a$.

11. En Partikel tiltrækkes af en Trekants Vinkelspidser med Kræfter, der ere proportionale med Afstanden. Find Ligevægtsstillingen. Geometrisk [illegible]
Tyngdepunktet

Kræfter, virkende paa et bundet Punkt.

18. Et Punkt siges at være bundet til en Flade, dersom det kun kan bevæge sig i Fladen, men ikke fjerne sig fra den. Et saadant Punkt kan paavirkes af en ydre Kraft og dog være i Hvile; Erfaringen viser, at for at dette skal finde Sted, maa den ydre Kraft nærme sig desto mere til at være normal paa Fladen, jo haardere og glattere denne er. Vi definere derfor en glat Flade som en saadan, der kun kan tilintetgøre Virkningen af Kræfter, normale paa Fladen, og forudsætte da, at Fladen er tilstrækkelig haard til at tilintetgøre Virkningen af enhver saadan Kraft. Fladen virker da som en Kraft, hvis Retning er normal paa Fladen, og som er lig (og modsat) den normale ydre Kraft, som den tilintetgør (Ligestorhed af Aktion og Reaktion). Tilføje vi en saadan Kraft (Fladens Reaktion)

kunne vi tænke os Fladen borte og betragte Punktet som frit.

En hvilken som helst Kraft, der virker paa Punktet, kan opløses i to, af hvilke den ene er rettet efter Normalen, medens den anden falder i Tangentplanen; den første, Punktets Tryk paa Fladen, tilintetgøres af Reaktionen, medens intet modsætter sig den andens Virkning; skal Punktet blive i Hvile, maa denne Komposant være Nul.

Ligevægtsbetingelsen for et til en glat Flade bundet Punkt er derfor, at Resultanten af de Punktet paavirkende Kræfter er rettet efter Normalen. Dette finder Sted, dersom Summen af Kræfternes Projektioner paa to Retninger i Tangentplanen er Nul. Ønsker man kun at søge Ligevægtsbetingelserne, behøver man derfor kun at projicere paa to saadanne Retninger; vil man tillige bestemme Reaktionen, projicerer man ogsaa paa Normalen.

19. For at udtrykke Ligevægtsbetingelserne analytisk, tænke vi os de ydre Kræfters Resultant R efter Akserne af et retvinklet Koordinatsystem at have Komposanterne X, Y og Z. Er Fladens Ligning $u = 0$, udtrykke da Ligningerne

$$\frac{X}{\frac{du}{dx}} = \frac{Y}{\frac{du}{dy}} = \frac{Z}{\frac{du}{dz}}, \tag{8}$$

at Resultantens og Normalens Retningscoss. ere proportionale, altsaa, at Resultanten falder paa Normalen. Ligningerne ere derfor Ligevægtsbetingelserne og bestemme, naar Kræfterne ere givne, i Forbindelse med Fladens Ligning, Punktets Koordinater i Ligevægtsstillingen, medens R er Trykket.

Dersom Punktet ikke kan fjerne sig fra Fladen til den ene Side, men vel til den anden Side, maa til Ligevægtsbetingelserne føjes den, at Resultanten er rettet til den Side, til hvilken Punktet ikke kan fjerne sig.

20. Et Punkt kan ogsaa være bundet til en glat Kurve; tænkes den paa Punktet virkende Kraft opløst i to, den ene efter Tangenten og den anden i Normalplanen, tilintetgøres den sidste, *Trykket* paa Kurven, af Kurvens Reaktion, medens intet modsætter sig Virkningen af den første.

Ligevægtsbetingelsen for et til en glat Kurve bundet Punkt er derfor, at Resultanten af de Punktet paavirkende ydre Kræfter ligger i Kurvens Normalplan. Dette finder Sted, dersom Summen af Kræfternes Projektioner paa Tangenten er Nul. Ønsker man kun at søge Ligevægtsbetingelserne, behøver man derfor kun at projicere paa Tangenten, medens man, for at bestemme Trykket paa Kurven, tillige maa projicere paa to Retninger i Normalplanen.

21. Ere Kræfterne som ovenfor X, Y og Z, Kurvens Ligninger $u = 0$, $v = 0$, bliver Ligevægtsbetingelsen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \qquad (9)$$

idet denne Ligning udtrykker, at Resultanten (hvis Retningscoss. ere proportionale med X, Y og Z) er vinkelret paa Tangenten (hvis Retningscoss. ere proportionale med dx, dy, dz). Bortskaffes af denne Ligning dx, dy og dz ved Hjælp af Kurvens Differentialligninger, faar man en Ligning, der, i Forbindelse med Kurvens Ligninger, bestemmer Koordinaterne til Angrebspunktet i dets Ligevægtsstilling.

22. Vi have i den ovenstaaende Udvikling tænkt os materielle Flader eller Kurver. Ifølge det opstillede Grundprincip V kan man imidlertid, hvis Punktet paa

Grund af andre Forbindelser har en Flade eller Kurve til geometrisk Sted, tænke sig Forbindelserne borte og betragte det geometriske Sted som materielt.

Anvendelser.

12. Et Punkt med Vægt V hviler paa en Skraaplan, hvis Vinkel med Horizontalplanen er v. Ligevægt tilvejebringes ved en horizontal Kraft Q; find denne og Trykket paa Skraaplanen.

Q maa ligge i den ved Retningen af V og Planens Reaktion bestemte Plan. Ligevægtsbetingelsen er

$$V\sin v = Q\cos v, \text{ hvoraf } Q = V\operatorname{tg} v.$$

Trykket T faas ved Projektion paa Planens Normal,

$$T = V\cos v + Q\sin v = V\sec v.$$

13. En lille Ring kan uden Gnidning glide paa en Snor, hvis Endepunkter ere faste. Ringen angribes af en Kraft P; find Betingelsen for Ligevægt og Spændingen i Snoren.

Snoren kan erstattes ved en materiel Omdrejningsellipsoide med de faste Punkter til Brændpunkter, og hvis ene Akse er Snorens Længde. Kraften maa være normal paa denne Flade og derfor halvere Vinklen mellem Brændstraalerne (Snorstykkerne). Da Spændingen i de to Snorstykker og Kraften ere i Ligevægt, blive Spændingerne lige store. Projicerer man paa Kraftens Retning, faar man

$$P = 2T\cos\tfrac{1}{2}v,$$

hvor P er Kraften, T Spændingen og v Snorstykkernes Vinkel.

14. Et Punkt er bundet til en Cirkel med Radius a; ethvert Bueelement ds tiltrækker Punktet med en Kraft, $\frac{ds}{r}$, hvor r er Elementets Afstand fra Punktet; find Trykket.

Paa Grund af Kræfternes symmetriske Beliggenhed er Resultanten rettet mod Centrum. Der er altsaa Ligevægt for enhver Stilling af Punktet. Projiceres paa Resultantens Retning, faas Trykket, idet $\angle (Rr) = \theta$,

$$R = \int_0^{2\pi a} \frac{ds}{r} \cos\theta = \int_0^{2\pi a} \frac{ds}{2a} = \pi.$$

15. En Kugle med Vægt V hviler paa to Skraaplaner med givne Heldninger. Find Trykkene. (Kuglens Vægt tænkes virkende i Centrum.)

16. Et Punkt med Vægt V holdes i Ligevægt paa en glat Skraaplan med Heldning v ved en Kraft, der ligger i Skraaplanen; find Kraften og Trykket.

17. En Kugle med Vægt V hviler paa tre Skraaplaner, der danne et ret Hjørne. Skraaplanernes Vinkler med Horizontalplanen ere givne. Find Trykkene.

18. Et Punkt er bundet til en Ellipse og tiltrækkes fra Brændpunkterne af Kræfter, der ere omvendt proportionale med Afstandens Kvadrat (og som ere 1 i Afstanden 1). Find Ligevægtsstillingerne.

19. Et Punkt, der er bundet til en Kugleflade, paavirkes af Kræfter, der repræsenteres ved tre paa hverandre vinkelrette Korder, der udgaa fra Punktet. Bevis, at Punktet er i Ligevægt og bestem Trykket.

20. En tynd Stang uden Vægt med Længde l støtter sit nederste Endepunkt til en glat vertikal Væg og hviler paa et fast Punkt i Afstanden a fra Væggen, medens Stangens andet Endepunkt bærer en Vægt V. Find Stangens Vinkel med Væggen i Ligevægtsstillingen.

21. To Punkter uden Vægt ere bundne til to Stænger i samme Vertikalplan, og som begge danne Vinklen v med den lodrette. De ere forbundne ved en Snor af Længden l,

som i sit Midtpunkt bærer en Vægt V. Find Ligevægtsstillingen og Spændingen.

22. To Punkter med samme Vægt V ere bundne til at blive i samme Højde paa en vertikal Cirkelbue (med den konkave Side nedefter). De ere forbundne ved en Snor med given Længde, der i sit Midtpunkt bærer en Vægt $2V$. Find Ligevægtsstillingen og Spændingen.

23. Paa en glat, ustrækkelig Snor med faste Endepunkter kan en lille Ring bevæge sig. Ringen bærer en Vægt. Hvorledes bestemmes Ligevægtsstillingen og Spændingen? Snorens og Ringens Vægt tænkes forsvindende.

24. Et Punkt er bundet til en Ellipsoide og tiltrækkes af den største Akses Endepunkter med Kræfter, der ere omvendt proportionale med Afstandens Kvadrat, og som ere 1 i Afstanden 1. Find Ligevægtsstillingerne og Trykket paa Fladen.

25. En Partikel med Vægt V er bundet til en Parabel med vertikal Akse (Konkaviteten opefter) og frastødes af Aksen med en Kraft, der er proportional med Afstanden og lig det dobbelte af Vægten i en Afstand lig Parametren. Find Ligevægtsstillingen og Trykket.

26. Et Punkt A af en Cirkelperiferi tiltrækkes af Periferien og af en uendelig, ret Linie, vinkelret paa Radius til A. Linien og Cirklen ligge til modsatte Sider af A, og af dem begge har en Længde 1 en Masse μ. Tiltrækningen er proportional med Massen og omvendt proportional med Afstanden. Bevis, at Partiklen er i Ligevægt.

27. Et tungt Punkt er bundet til Fladen $xyz = a^3$. Find Ligevægtsstillingen, naar z-Aksen er lodret.

28. En Partikel med Vægt V er bundet til en horizontal Cirkel og tiltrækkes af et Punkt lodret over Centrum

med en Kraft $2V$. Find Trykkets Størrelse og Retning. naar Cirklens Radius er r, og Punktets Højde over Centrum er a.

29. Af tre Kræfter, der holde hverandre i Ligevægt, er den ene afsat, og af den anden er Størrelsen given; find det geometriske Sted for den tredjes Endepunkt.

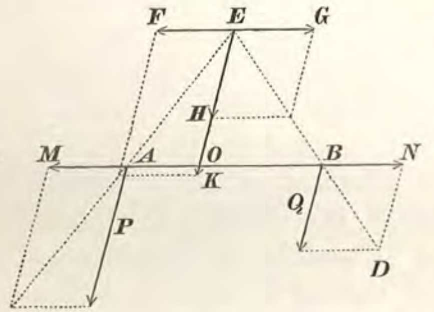
30. Find Ligevægtstillingen for et Punkt, der tiltrækkes af de tre Vinkelspidser af en Trekant med Kræfter, der repræsenteres ved de tilsvarende Medianer.

ANDET KAPITEL.

Parallele Kræfter.

Kræfternes Sammensætning.

23. Lad A og B være to med hinanden fast forbundne Punkter, der angribes af to parallele Kræfter, nemlig A af Kraften P, B af Kraften Q. I A og B tilføje vi to lige store og modsatte Kræfter AM og BN. P sammensættes med AM til AC, Q med BN til BD. Angrebspunkterne for AC og BD flyttes til deres Skæringspunkt E. AC kan derpaa opløses i



$EF = AM$ og $EK = P$, BD i $EG = BN$ og $EH = Q$. EF og EG tilintetgøre hinanden, medens EH og EK sammensættes, og de parallele Kræfter ere saaledes erstattede ved en med dem parallel Kraft $P + Q$.

Vi søge nu Beliggenheden af det Punkt O, hvor de parallele Kræfters Resultant skærer AB. Man har

$$\frac{AO}{EO} = \frac{EF}{P}; \quad \frac{OB}{EO} = \frac{EG}{Q},$$

altsaa

$$AO \cdot P = OB \cdot Q. \tag{10}$$

der bestemmer Beliggenheden af Punktet O. Beviset gælder ogsaa, naar de parallele Kræfter have modsatte Retninger (ere antiparallele), naar vi vedtage at give saadanne Kræfter modsatte Fortegn. Kun i det Tilfælde, hvor de antiparallele Kræfter ere lige store, gælder Beviset ikke, da AC og BD blive parallele. Vi komme senere tilbage til dette Tilfælde.

24. Ligesom hvilke som helst Punkter i de givne Kræfter kunne betragtes som Angrebspunkter, kan ogsaa ethvert Punkt i Resultanten betragtes som dens Angrebspunkt. Punktet O spiller imidlertid en særlig Rolle. Man ser af (10), at dets Beliggenhed er uafhængig af de parallele Kræfters Retning. Drejer man P og Q om A og B, saa at de vedblive at være parallele, vil derfor deres Resultant $P+Q$ stadig gaa gennem O. Dette Forhold har særlig Betydning. Lad f. Eks. Vægtene P og Q være ophængte i Endepunkterne af en Stang AB, hvis Vægt vi kunne se bort fra, og som kan dreje sig om et fast Punkt (en matematisk Vægtstang). Vi forudsætte, at der er Ligevægt. Det faste Punkt kan borttages, naar vi indføre dets Reaktion, paa Stangen. Denne er da paavirket af denne Reaktion, P og Q; Betingelsen for Ligevægt er derfor, at det faste Punkt ligger i O, og Trykket paa dette Punkt vil være $P+Q$ og have samme Retning som P og Q. At Beliggenheden af O er uafhængig af denne Retning viser altsaa, at Ligevægten ikke forstyrres, naar Stangen drejes om det faste Punkt, idet det aabenbart er ligegyldigt, om man drejer Stangen eller Kræfterne.

25. Dersom A og B med Hensyn til et Koordinatsystem have Koordinaterne x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, bestemmes som bekendt Koordinaterne ξ, η, ζ til O ved Ligningerne

$$R\xi = Px_1 + Qx_2\,; \quad R\eta = Py_1 + Qy_2\,; \quad R\zeta = Pz_1 + Qz_2\,,$$

hvor

$$R = P + Q.$$

Har man et vilkaarligt Antal parallele Kræfter, og er en af disse P_k med Angrebspunktet (x_k, y_k, z_k), udvides disse Formler let til følgende:

$$\left.\begin{array}{c} R\xi = \Sigma P_k x_k; \quad R\eta = \Sigma P_k y_k; \quad R\zeta = \Sigma P_k z_k, \\ R = \Sigma P_k. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Produktet af en Kraft og dens Angrebspunkts Afstand fra en Plan kaldes **Kraftens Moment med Hensyn til Planen**; ved **parallele Kræfter er altsaa Resultantens Moment med Hensyn til en vilkaarlig Plan lig Summen af Komposanternes Momenter med Hensyn til Planen.** I Stedet for Afstanden fra Planen kan man tage Linier, parallele med en vilkaarlig Linie. Ligge Kræfterne i samme Plan, og tages denne til xy-Pl., falder den tredje Ligning (11) bort, og de to første udtrykke, at Resultantens Moment med Hensyn til en vilkaarlig Linie i Planen er lig Summen af Komposanternes Momenter med Hensyn til Linien, og vise, at man kan bestemme Angrebspunktet ved at anvende denne Sætning paa to ikke parallele Linier i Planen.

26. Angrebspunktet for Resultanten af parallele Kræfter kaldes de parallele Kræfters **Centrum**. Dette Punkt er, som vi have vist, uafhængigt af Kræfternes Retning. Tænker man ikke paa en Drejning af Kræfterne, behøver man kun at bestemme et vilkaarligt Punkt af Resultanten; lægger man da xy-Pl. vinkelret paa Kræfterne, behøver man ikke den tredje Ligning (11). Ligge Kræfterne i samme Plan, behøver man i samme Tilfælde ikke den anden Ligning, naar man lægger x-Axen vinkelret paa Kræfterne. Forstaar man ved en Krafts Moment med Hensyn til et Punkt Produktet af Kraften og dens Afstand fra Punktet (begge Faktorer tagne med Fortegn), udtrykker den første Ligning, at Resultantens Moment med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i Planen er lig Summen af Komposanternes Momenter med Hensyn til det samme Punkt; vi skulle senere vise, at Sætningen i denne Form gælder for hvilke som helst Kræfter i Planen.

27. Vi viste ovenfor, at Metoden til Sammensætning af to parallele Kræfter var ubrugelig, naar Kræfterne vare lige store med modsatte Tegn. Man ser ogsaa let, at to saadanne Kræfter ikke kunne komme i Ligevægt med en enkelt Kraft, da en saadan ved Sammensætning med den ene aldrig kan give en Resultant, der tilintetgør den anden. Anvender man de fundne Formler paa to saadanne Kræfter, faar man en Resultant, der er Nul, men som ligger uendelig fjernt. Man kan derfor bruge de fundne Formler i alle Tilfælde, naar man fastholder, at en uendelig fjern Resultant Nul viser, at Systemet af Kræfter reduceres til to, der ere lige store og med modsatte Retninger.

Ligevægtsbetingelser for parallele Kræfter.

28. En nødvendig Ligevægtsbetingelse for parallele Kræfter er $R = 0$ eller $\Sigma P_k = 0$. Denne Betingelse er imidlertid ikke tilstrækkelig, da man, naar den er opfyldt, i Reglen faar uendelige Koordinater til Angrebspunktet.

Er Kræfternes Sum Nul, kunne vi sammensætte dem alle med Undtagelse af P_1; man faar da en Resultant $-P_1$, hvis Angrebspunkt bestemmes ved

$$\left.\begin{aligned} -P_1\xi &= P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots, \\ -P_1\eta &= P_2y_2 + P_3y_3 + \ldots, \\ -P_1\zeta &= P_2z_2 + P_3z_3 + \ldots \end{aligned}\right\}. \qquad (12)$$

Systemet er herved reduceret til de to Kræfter P_1 med Angrebspunktet (x_1, y_1, z_1) og $-P_1$ med Angrebspunktet (ξ, η, ζ). Disse to Kræfter holde kun hinanden i Ligevægt, dersom de falde i samme Linie, altsaa dersom den Linie, der forbinder (x_1, y_1, z_1) med (ξ, η, ζ), er parallel med Kræfterne; danne disse med det retvinklede Koordinatsystems Akser Vinklerne α, β og γ, er Betingelsen herfor

$$\frac{x_1-\xi}{\cos\alpha} = \frac{y_1-\eta}{\cos\beta} = \frac{z_1-\zeta}{\cos\gamma},$$

saa at Ligevægtsbetingelserne ere (12):

$$\frac{\Sigma Px}{\cos\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\cos\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\cos\gamma}; \quad \Sigma P = 0. \qquad (13)$$

Skal Ligevægten være en saadan, som ikke forstyrres, naar Kræfterne drejes om deres Angrebspunkter, maa Punkterne (x_1, y_1, z_1) og (ξ, η, ζ) falde sammen; Ligevægtsbetingelserne ere da

$$\Sigma Px = 0; \ \Sigma Py = 0; \ \Sigma Pz = 0; \ \Sigma P = 0. \qquad (14)$$

For parallele Kræfter i samme Plan blive Betingelserne for Ligevægt, at Kræfternes Sum er Nul, og at deres Momenter med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i Planen have Summen Nul.

Anvendelser.

31. En tynd Stang bærer i Punkterne A, B, C henholdsvis Vægtene 2, 3, 4. I hvilket Punkt O skal Stangen understøttes for at være i Ligevægt, og hvor stort bliver Trykket i O?

Trykket bliver $2+3+4 = 9$, og O bestemmes, idet Momenterne tages med Hensyn til A, ved Ligningen

$$9 . AO = 3 . AB + 4 . AC.$$

32. Find Centrum for tre lige store parallele Kræfter P, der virke i Punkterne A, B og C.

P i B og P i C sammensættes til $2P$ i Midtpunktet af BC, og $2P$ sammensættes atter med P i A til $3P$ i Skæringspunktet for Medianerne i Trekanten ABC.

33. Find Centrum for fire lige store, parallele Kræfter, der virke i Hjørnespidserne af en tresidet Pyramide.

34. Et trekantet, trebenet Bord har Vægten V og Siderne 3, 4 og 5. Hvor stort er Trykket paa hvert af Benene, naar Bordets Vægt tænkes samlet i Trekantens Tyngdepunkt?

35. En uendelig Række smaa Kugler, af hvilke hver følgende vejer halv saa meget som den foregaaende, ere anbragte paa en Stang uden Vægt, idet Afstanden mellem to paa hinanden følgende er a. Hvor skal Stangen understøttes for at være i Ligevægt?

36. Af en Stang med Længden a har et Element ds Vægten $kxds$, hvor k er et givet Tal og x er Elementets Afstand fra Stangens ene Endepunkt. Hvor skal Stangen understøttes for at være i Ligevægt, og hvor stort er Trykket i Understøtningspunktet?

37. Bevis, at en tynd, trekantet Plade af ensartet Stof og med samme uendelig lille Tykkelse overalt er i Ligevægt, naar den understøttes i Medianernes Skæringspunkt.

38. Fire parallele Kræfter have Størrelserne 1, 2 —3 og 4 og Angrebspunkterne (0, 0, 0), (1, 2, 3), (3, 2, 1) og (4, 1, 1). Find Resultantens Størrelse og Angrebspunkt.

39. I Hjørnespidserne af et Tetraeder virke parallele Kræfter, proportionale med Arealerne af de modstaaende

Sideflader; bevis, at deres Centrum falder i den indskrevne Kugles Centrum.

40. Om en Kugle er et Polyeder omskrevet, og i Røringspunkterne er anbragt parallele Kræfter, proportionale med de tilsvarende Sidefladers Arealer. Bevis, at de parallele Kræfters Centrum falder sammen med Kuglens.

TREDJE KAPITEL.

Tyngdepunktet.

Masse, Tæthed.

29. Et Legeme kaldes homogent, naar der ikke er anden Forskel paa kongruente Dele af det end den, som Beliggenheden medfører; i modsat Fald kaldes det heterogent.

Efter hvad vi have sagt om Tyngdekraftens Virkning følger, at lige store Volumina af et homogent Legeme have samme Vægt. For forskellige homogene Legemer afhænger Vægten af et givet Volumen af Legemets Natur. Vægten af en Volumenenhed af et Legeme kaldes dets Vægtfylde (specifik Vægt). Vand har altsaa ved sin største Tæthed Vægtfylden 1.

Dersom et Legeme blev sammenpresset, saa at dets Volumen blev halv saa stort, vilde dets Vægt blive uforandret, medens Vægtfylden blev dobbelt saa stor. Man siger derfor, at den Masse, som findes i et vist Volumen, vokser med Vægtfylden. Som Maal for et Legemes Masse kan man derfor bruge dets Vægt eller en dermed proportional Størrelse. Er p et Legemes Vægt, m dets Masse, sætter man i Virkeligheden

$$p = gm, \tag{15}$$

hvor g er et konstant Tal, hvis Bestemmelse vi senere ville omtale*).

Den Masse, der findes i Forhold til Volumen, kaldes Tætheden; er Tætheden ϱ, Vægtfylden ω, Volumen v, har man altsaa:

$$\omega = g\varrho; \quad m = \varrho v; \quad p = g\varrho v. \tag{16}$$

30. Medens Forholdet mellem Masse og Volumen ved homogene Legemer er konstant og lig Tætheden, bliver det ved heterogene Legemer ikke konstant, men angiver for enhver Del af Legemet, hvad man kan kalde dets Middeltæthed. Lader man den betragtede lille Del af Legemet aftage mod Nul, nærmer Forholdet sig til en vis Grænseværdi; denne kalde vi Legemets Tæthed i det betragtede Punkt; man har altsaa:

$$\varrho = \frac{dm}{dv}; \quad m = \int \varrho dv. \tag{17}$$

Det sidste Integral er i Almindelighed tredobbelt og udstrækkes til alle Legemets Dele.

Eksp. 1. En Kugle med Radius a bestaar af koncentriske, homogene Lag. I Afstanden 1 fra Centrum er Tætheden 1, og for øvrigt er den proportional med Afstanden fra Centrum. Find Kuglens Masse.

En Kugleskal med Radius r og Tykkelsen dr har Volumen $4\pi r^2 dr$, Tætheden r, altsaa Massen $4\pi r^3 dr$; man har da:

$$m = \int_0^a 4\pi r^3 dr = \pi a^4.$$

Eksp. 2. I et retvinklet Parallelepipedum med Kanterne $2a$, $2b$ og $2c$ er Tætheden 1 i Afstanden 1 fra Centrum og forholder sig for øvrigt som Kvadraterne af Punkternes Afstande fra Centrum; find Massen.

*) Naar Metren er Længdeenheden, er $g = 9{,}80896\ldots$ (Paris)

Tages Centrum til Begyndelsespunkt, og lægges Akserne parallele med Kanterne, bliver Tætheden i (x, y, z) udtrykt ved $x^2+y^2+z^2$; Massen af Volumenelementet er altsaa $(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ og følgelig:

$$m = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}(x^2+y^2+z^2)dxdydz = \frac{8}{3}abc(a^2+b^2+c^2).$$

Tyngdepunktets Bestemmelse.

31. Tyngdekraften paavirker enhver Del af et Legeme og giver Volumenelementet dv en Vægt $g\varrho dv$; ethvert Punkt (x, y, z) af Legemet er altsaa Angrebspunkt for en lodret Kraft af denne Størrelse; denne Krafts Momenter med Hensyn til Koordinatplanerne ere:

$$g\varrho x dv;\quad g\varrho y dv;\quad g\varrho z dv,$$

medens Kræfternes Sum er hele Legemets Vægt

$$P = g\int\varrho dv.$$

Centrum for de uendelig mange uendelig smaa parallele Kræfter kaldes Legemets Tyngdepunkt; det er et Punkt, som er uafhængigt af Legemets Stilling, idet Kræfterne kunne drejes om deres Angrebspunkter til nye parallele Stillinger, uden at Centrum flyttes. Tyngdepunktets Koordinater bestemmes nu ifølge (11) ved:

$$\xi = \frac{\int\varrho x dv}{\int\varrho dv};\quad \eta = \frac{\int\varrho y dv}{\int\varrho dv};\quad \zeta = \frac{\int\varrho z dv}{\int\varrho dv},\qquad (18)$$

idet den konstante Faktor g bortforkortes. Er Legemet homogent, kan ϱ bortforkortes, og man faar, hvad man kalder det geometriske Legemes Tyngdepunkt, bestemt ved:

$$\xi = \frac{\int x dv}{V};\quad \eta = \frac{\int y dv}{V};\quad \zeta = \frac{\int z dv}{V},\qquad (19)$$

hvor V er Legemets Volumen.

Man taler ogsaa om Tyngdepunktet af en Flade; man opfatter da Fladen som et Legeme med en meget lille konstant Tykkelse og faar da, naar Fladeelementet er df,

$$\xi = \frac{\int x df}{F};\quad \eta = \frac{\int y df}{F};\quad \zeta = \frac{\int z df}{F},\qquad (20)$$

hvor F er Fladens hele Areal. Man kan forresten ogsaa tænke sig Tykkelsen eller Tætheden i Fladens forskellige Punkter varierende; man ser let, hvilken Ændring Formlerne derved faa.

Paa lignende Maade taler man om en Linies Tyngdepunkt; er Linieelementet ds, den givne Linies hele Længde L, faar man:

$$\xi = \frac{\int x ds}{L};\quad \eta = \frac{\int y ds}{L};\quad \zeta = \frac{\int z ds}{L}.\qquad (21)$$

Vi skulle nu give nogle Anvendelser af disse Formler.

32. En Cirkelbues Tyngdepunkt. Lad Radius være a, Centervinklen $2u$. Læg Begyndelsespunktet i Centrum og x-Aksen gennem Buens Midtpunkt; man ser let, at Tyngdepunktet maa falde i denne Akse, saa at man kun behøver at beregne ξ; man har nu, idet $x = a\cos\theta$; $ds = ad\theta$,

$$\xi = \frac{\int x ds}{L} = \frac{a^2\int_{-u}^{+u}\cos\theta\, d\theta}{L} = \frac{a\,.\,2a\sin u}{L} = \frac{ak}{L},$$

idet k er Buens Korde.

33. En vindskæv Kurves Tyngdepunkt. En vindskæv Kurve projiceres paa xy-Pl. i Parablen $y^2 = 4ax$, paa xz-Pl. i en Cykloide, der gaar gennem Begyndelsespunktet, og hvis Akse falder paa x-Aksen. Den rullende Cirkels Diameter er b; man har da:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{b-x}{x}};\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}},$$

hvoraf
$$ds = \sqrt{\frac{a+b}{x}}\, dx.$$

Søges Tyngdepunktet af den Bue, hvis Endepunkter bestemmes ved $x = a$ og $x = b$, har man $L = 2\sqrt{(a+b)b}$ og altsaa:

$$2\sqrt{(a+b)b}\,\xi = \int_0^b x\,dx \sqrt{\frac{a+b}{x}} = \frac{2}{3} b\sqrt{(a+b)b}; \quad \xi = \frac{1}{3} b;$$

$$2\sqrt{(a+b)b}\,\eta = 2\int_0^b \sqrt{ax}\sqrt{\frac{a+b}{x}}\,dx = 2b\sqrt{a(a+b)}; \quad \eta = \sqrt{ab};$$

$$2\sqrt{(a+b)b}\,\zeta = \int_0^b z\sqrt{\frac{a+b}{x}}\,dx = \sqrt{a+b}\int_0^b \frac{z\,dx}{\sqrt{x}};$$

men

$$\int \frac{z\,dx}{\sqrt{x}} = 2z\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\,dz = 2z\sqrt{x} - 2\int \sqrt{b-x}\,dx,$$

hvorved

$$2\sqrt{b}\,\zeta = 2\frac{\pi}{2} b\sqrt{b} - \frac{4}{3} b\sqrt{b}; \quad \zeta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) b.$$

34. En Trekants Tyngdepunkt. Deles Trekanten i Elementer ved Linier, parallele med en Side, faar hver af disse sit Tyngdepunkt paa Medianen; Tyngdepunktet ligger altsaa i enhver Median og er derfor disses Skæringspunkt.

Anbringer man tre lige store Vægte i en Trekants Vinkelspidser, faa disse samme Tyngdepunkt som Trekantens Areal; de to kunne nemlig sammensættes til een i Sidens Midtpunkt, og Resultanten af denne og den tredje angriber i Medianen (se Ekspl. 32). Er hver af Vægtene lig Trekantens Areal, bliver Resultanten 3 Gange Arealet.

35. En Firkants Tyngdepunkt. Lad Firkanten være $ABCD$, og lad O være Diagonalernes Skæringspunkt. I A, B og C anbringes tre Vægte lig Trekanten ABC, i A, C og D tre Vægte lig ADC; de seks Vægte have det samme Tyngdepunkt som Firkanten. Vægten i B og Vægten i D have en Resultant, lig Firkantens Areal og virkende i et Punkt N af BD, idet $BO = ND$. Vægtene i A og C have en Resultant, lig 2 Gange Firkantens Areal og virkende i Midtpunktet M af AC. Tyngdepunktet T ligger altsaa i MN, saaledes at $TN = 2MT$, og Resultanten i T er 3 Gange Firkantens Areal.

Heraf udledes let følgende Konstruktion af Trapezets Tyngdepunkt: Forlæng de parallele Sider i modsatte Retninger og gør enhver af Sidernes Forlængelser lig den anden Side. Tyngdepunktet ligger da i den Linie, der forbinder Forlængelsernes Endepunkter, og i den Linie, der forbinder de parallele Siders Midtpunkter.

36. Cirkeludsnit. Udsnittet kan tænkes sammensat af uendelig mange Trekanter, hvis Toppunkter ligge i Centrum, medens Grundlinierne ere uendelig smaa Korder. Disse Trekanters Tyngdepunkter falde i en Bue, hvis Radius er $\frac{2}{3}$ af den givne, og hvis Centrum og Centervinkel falde sammen med Udsnittets. Tænke vi os, at ethvert Element af denne Bue har den samme Vægt som den lille Trekant, hvori det ligger, vil Buen blive homogen, og dens Tyngdepunkt falde sammen med Udsnittets Tyngdepunkt. Dette ligger altsaa i en Afstand fra Centrum

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{ak}{L}.$$

37. Omdrejningsfladers Tyngdepunkt. En Omdrejningsflade om z-Aksen, begrænset af to Planer, bestemte ved $z = a$ og $z = b$, har sit Tyngdepunkt i Aksen; kaldes et Element af Meridiankurven i xz-Pl. ds, bliver Overfladens Element $2\pi x ds$, dets Moment med Hensyn til xy-Pl. $2\pi xz ds$, saa at Tyngdepunktet bestemmes ved:

$$\zeta \int_a^b x \frac{ds}{dz} dz = \int_a^b xz \frac{ds}{dz} dz.$$

Er f. E. Meridiankurven Parablen $x^2 = pz$, bliver $p\,ds = \sqrt{p^2 + 4x^2}\,dx$, altsaa:

$$p\zeta \int_{\sqrt{pa}}^{\sqrt{pb}} x\sqrt{p^2 + 4x^2}\,dx = \int_{\sqrt{pa}}^{\sqrt{pb}} x^3\sqrt{p^2 + 4x^2}\,dx \text{ o. s. v.}$$

38. Kuglefladen. Vi ville søge Tyngdepunktet for den Del af Kuglefladen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, der afskæres ved Cylindren $x^2 + y^2 = ax$. Tyngdepunktet maa ligge i x-Aksen. Overfladeelementet er:

$$df = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy = \frac{a\,dx\,dy}{z},$$

hvoraf

$$\xi \,.\, 2a \iint \frac{dx\,dy}{z} = 2a \iint \frac{x\,dx\,dy}{z}$$

eller, idet vi indføre polære Koordinater i xy-Pl.:

$$\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r^2\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \text{ o. s. v.}$$

39. En Pyramides Tyngdepunkt. Lad Grundfladens Areal være A, Højden h; et Snit parallelt med Grundfladen i Afstanden x fra Toppunktet, har Arealet $\frac{x^2}{h^2}A$; dette Snit og et dermed parallelt i Afstanden dx begrænse en Skive, hvis Volumen er $\frac{x^2}{h^2}A\,dx$, og hvis Moment med Hensyn til Grundfladen er Volumen, multipliceret med $h - x$. Tyngdepunktets Afstand fra Grundfladen er da:

$$\xi = \int_0^h x^2(h - x)\,dx : \int_0^h x^2\,dx = \frac{h}{4}.$$

Da alle de enkelte Skivers Tyngdepunkter ligge paa den rette Linie, der forbinder Toppunktet med Grundfladens

Tyngdepunkt, ligger altsaa ogsaa Pyramidens Tyngdepunkt i denne Linie; Værdien af ξ viser, at den deler Linien, saa at Stykket nærmest Toppunktet er tre Gange det andet Stykke. Det samme Punkt er Tyngdepunkt for fire lige store Vægte, ophængte i Pyramidens Hjørnespidser. Man ser heraf, at Tyngdepunktet er Midtpunkt af de Linier, der forbinde modstaaende Kanters Midtpunkter.

40. Et Ellipsoidesegments Tyngdepunkt. Lad Segmentet afskæres af Planen P. Snit, parallele med P, skære i ligedannede Ellipser, hvis Centrer ligge paa disse Planers Diameter. Segmentets Tyngdepunkt ligger derfor ogsaa paa denne Diameter; vi søge dets Afstand z_1 fra Ellipsoidens Centrum.

Lad en Diametralplan, parallel med P, være xy-Pl., Diametren z-Aksen for et skævvinklet System. En Plan, parallel med P, skærer Ellipsoiden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i en Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}.$$

Kaldes Arealet af Snittet med xy-Pl. A, bliver denne Ellipses Areal:

$$A\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

hvorved man faar, idet P har Ligningen $z = h$,

$$z_1 = \int_h^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z\,dz : \int_h^c \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{3}{4} \cdot \frac{(c + h)^2}{2c + h}.$$

41. En Cylinders Volumen og Tyngdepunkt. Vi ville betragte en Cylinder, hvis Grundflade, normal paa Frembringeren, ligger i xy-Pl., medens den anden Endeflade, der danner Vinklen v med Grundfladen, ligger i Planen:

$$z = ax + by + c.$$

Begyndelsespunktet er valgt i Grundfladens Tyngdepunkt. V er Volumen af Cylindren og F Arealet af Grundfladen; man har da, idet $d\lambda$ er Elementet af Grundfladen,

$$V = \int z d\lambda,$$

hvor Integralet udstrækkes over hele Grundfladen. Tyngdepunktet af den anden Endeflade projiceres i Grundfladens Tyngdepunkt, da de to Fladers Elementer kun ere forforskellige ved den kontante Faktor $\sec v$. Den tredje Koordinat til den anden Endeflades Tyngdepunkt er da c, og man har:

$$cF \sec v = \int z \sec v d\lambda,$$

hvoraf

$$V = cF. \tag{22}$$

Er Cylindren skraat afskaaren ved begge Endeflader, kan man ved et normalt Snit dele den i to, der hver for sig maales ved den fundne Formel; ved Addition faar man da:

En skraat afskaaren Cylinders Volumen (Ledekurven vilkaarlig) er Produktet af Normalsnittet og den Linie, der forbinder Endefladernes Tyngdepunkter.

Sætningen gælder ogsaa, naar de to Endeflader skære hinanden, idet de to kileformige Legemers Voluminer faa modsatte Tegn. Falde de to Endefladers Tyngdepunkter sammen, bliver Volumen Nul, altsaa de to kileformige Dele lige store.

For at bestemme Tyngdepunktet af Cylindren, hvis ene Endeflade er normal paa Frembringeren, betragte vi Volumenelementet $z d\lambda$. Dets Momenter med Hensyn til Koordinatplanerne ere henholdsvis:

$$xz d\lambda; \quad yz d\lambda, \quad \tfrac{1}{2} z^2 d\lambda;$$

man har altsaa, idet Integralerne tages over hele Grundfladen:

$$\xi \int z d\lambda = \int xz d\lambda; \quad \eta \int z d\lambda = \int yz d\lambda; \quad \zeta \int z d\lambda = \tfrac{1}{2} \int z^2 d\lambda.$$

Indsættes heri $z = ax + by + c$, og erindrer man, at man har Grundfladens Tyngdepunkt i Begyndelsespunktet, altsaa:

$$\int x d\lambda = 0; \quad \int y d\lambda = 0,$$

faar man:

$$\xi c F = a \int x^2 d\lambda + b \int xy d\lambda,$$

$$\eta c F = a \int xy d\lambda + b \int y^2 d\lambda,$$

$$\zeta c F = \tfrac{1}{2} a^2 \int x^2 d\lambda + ab \int xy d\lambda + \tfrac{1}{2} b^2 \int y^2 d\lambda + \tfrac{1}{2} c^2 F.$$

Integralerne ere afhængige af Grundfladens Størrelse og Form; vi tænke os, at Akserne i Grundfladen ere valgte saaledes, at $\int xy d\lambda = 0$, hvad der, som det senere vil blive vist, altid er muligt; sætte vi nu $\int x^2 d\lambda = B$; $\int y^2 d\lambda = A$, have vi:

$$\xi c F = aB; \quad \eta c F = bA; \quad 2\zeta c F = a^2 B + b^2 A + c^2 F.$$

Tænke vi os a og b varierende, medens c er konstant, vil Cylindrens Volumen cF ikke forandres; det geometriske Sted for Tyngdepunkterne af de skraat afskaarne Cylindre med konstant Volumen findes da ved Elimination af a og b; man faar:

$$\frac{2\zeta - c}{cF} = \frac{\xi^2}{B} + \frac{\eta^2}{A},$$

saa at det geometriske Sted er en Paraboloide, hvilken end Cylindrens Ledelinie er.

Guldins Regel.

42. Dersom en plan Kurve drejer sig om en Linie i Kurvens Plan, beskriver den en Omdrejningsflade, hvis Areal er Kurvens Længde, multipliceret med den af dens Tyngdepunkt gennemløbne Vej.

Tages Omdrejningsaksen til x-Akse, bestemmes Ordinaten til Kurvens Tyngdepunkt ved:

$$y_1 L = \int y ds,$$

hvor L er Kurvens Længde, og Integralet udstrækkes til hele Kurven. Omdrejningsfladens Areal er imidlertid:

$$A = 2\pi\int y\,ds = 2\pi y_1 L.$$

43. Volumen af et af en plan Figur ved Omdrejning om en i Figurens Plan liggende Akse beskrevet Omdrejningslegeme er Figurens Areal, multipliceret med den af dens Tyngdepunkt gennemløbne Vej.

Lægge vi x-Aksen som ovenfor, have vi:

$$y_1 A = \int \frac{y_1+y_2}{2}(y_1-y_2)\,dx,$$

hvor A er Arealet, $(y_1-y_2)dx$ er Arealets Element og $\frac{y_1+y_2}{2}$ er Ordinaten til Elementets Tyngdepunkt. Man har imidlertid Omdrejningslegemets Volumen:

$$V = \pi\int(y_1^2-y_2^2)\,dx = 2\pi y_1 A.$$

Man ser let, at de to beviste Sætninger gælde, selv om Tyngdepunktet kun beskriver en Del af Cirkelperiferien. Dersom Figuren bevæger sig, saa at dens Plan stadig er normal paa en vis plan Kurve, der stadig skærer Figuren i samme Punkt og er parallel med alle de Kurver, som Figurens Punkter beskrive, ville Sætningerne ovenfor gælde for enhver uendelig lille Del af Bevægelsen, og følgelig vil det beskrevne Volumen (Areal) være Figurens Areal (Kurvens Længde) multipliceret med den af Tyngdepunktet gennemløbne Vej.

Anvendelser.

41. Et Punkt tiltrækkes af et System af n Punkter med Kræfter, der ere proportionale med Afstanden. Vis, at Resultanten gaar gennem Systemets Tyngdepunkt.

Dette Punkt vælges til Begyndelsespunkt; er et af de tiltrækkende Punkter (x_p, y_p, z_p), medens (x, y, z) er det

tiltrukne Punkt, er Komposanten efter x-Aksen $k(x_p-x)$, altsaa:

$$X = k\Sigma(x_p-x) = -knx,$$

idet $\Sigma x_p = 0$. De andre Komposanter ere $-kny$ og $-knz$. Resultanten gaar derfor gennem Tyngdepunktet og er lig Afstanden fra dette, multipliceret med kn. Den beviste Sætning kan derfor ogsaa udtrykkes saaledes: Naar Tiltrækningen er proportional med Afstanden, tiltrækkes et Legeme som om hele dets Masse var samlet i dets Tyngdepunkt.

42. Ved at kvadrere og addere de tre Ligninger, der bestemme Tyngdepunktet for et System af Punkter, med Masserne m_1, m_2 . . ., faar man (se (11)):

$$M^2R^2 = \Sigma m_p^2\varrho_p^2 + 2\Sigma m_p m_q(x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q),$$

hvor M er den samlede Masse, R er Tyngdepunktets Afstand fra Begyndelsespunktet og ϱ_1, ϱ_2 . . . de enkelte Punkters Afstande fra Begyndelsespunktet. Nu er, idet $r_{p,q}$ er Afstanden mellem m_p og m_q,

$$r_{p,q}^2 = (x_p-x_q)^2 + (y_p-y_q)^2 + (z_p-z_q)^2,$$

altsaa:

$$\begin{aligned} &2\Sigma m_p m_q(x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q) \\ &= \Sigma m_p m_q(\varrho_p^2+\varrho_q^2) - \Sigma m_p m_q r_{p,q}^2 \end{aligned}$$

og derfor

$$\begin{aligned} M^2R^2 &= \Sigma m_p^2\varrho_p^2 + \Sigma m_p m_q(\varrho_p^2+\varrho_q^2) - \Sigma m_p m_q r_{p,q}^2 \\ &= M\Sigma m_p\varrho_p^2 - \Sigma m_p m_q r_{p,q}^2, \end{aligned}$$

der viser, at $\Sigma m\varrho^2$ er konstant, naar Begyndelsespunktet beskriver en Kugle med Centrum i Tyngdepunktet, og Minimum, naar Begyndelsespunktet vælges i Tyngdepunktet.

43. Et Areal begrænses af en Parabel og en Korde, vinkelret paa Aksen. Find Tyngdepunktet.

44. Bevis, at Tyngdepunktet for en Trekants Perimeter er Centrum for en Cirkel, indskreven i den Trekant,

hvis Vinkelspidser ere Midtpunkterne af den givne Trekants Sider.

45. Søg Tyngdepunkterne for Buelængde og for Areal af en Cykloide.

46. Find Overflade og Volumen af det Legeme, som beskrives af en Cirkel, der drejer sig om en uden for Cirklen men i dens Plan liggende Akse.

47. En Polygon er omskreven om en Cirkel. Bevis, at Arealets Tyngdepunkt deler den Linie, der forbinder Perimetrens Tyngdepunkt med Centrum, i Forholdet 1 : 2.

48. Bestem Tyngdepunktet for Arealet af en Halvcirkel, hvis Tæthed forholder sig som Kvadratet af Afstanden fra Centrum.

49. En ret Linie bevæger sig saaledes, at den i Forbindelse med to faste rette Linier danner en Trekant med konstant Areal. Hvilken Kurve beskriver denne Trekants Tyngdepunkt?

50. Bevis, at Tyngdepunktet for et vilkaarligt Areal paa Overfladen af en Kugle med Centrum i Begyndelsespunktet har Koordinater, der ere proportionale med Arealets Projektioner paa Koordinatplanerne.

51. Hvor ligger Tyngdepunktet for en Omgang af en Vindellinie?

52. Find Volumen og Overflade af det Legeme, som beskrives af en Cirkel, hvis Plan, uden at glide, drejer sig en Gang rundt paa en cirkulær Cylinder.

53. Benyt Guldins Regel til Bestemmelse af en Halvcirkels Tyngdepunkt.

54. Et Areal, begrænset af en Parabelbue og den Korde, der forbinder Toppunktet med Endepunktet af Ordinaten fra Brændpunktet, drejer sig om denne Korde. Bestem det frembragte Legemes Tyngdepunkt.

55. Hvilke Formler faas til Bestemmelse af et plant Areals Tyngdepunkt ved polære Koordinater?

56. Bestem Tyngdepunktet for det Volumen, der begrænses af en cirkulær Kegleflade og to Kugleflader med Centrum i Keglens Toppunkt.

57. Find Tyngdepunktet for en skraat afskaaren cirkulær Cylinder.

58. Find Tyngdepunktet for Overflade og for Volumen af en Halvkugle.

FJERDE KAPITEL.

Kraftpar eller Svingkræfter.

Et Kraftpars Moment.

44. Vi have bevist, at to parallele Kræfter have en enkelt Resultant, undtagen i det Tilfælde, hvor de ere lige store og have modsatte Retninger (ere antiparallele). Et System af to saadanne Kræfter, P og $-P$, kaldes et Kraftpar eller en Svingkraft og betegnes $(P, -P)$; Kræfternes Afstand kaldes Kraftparrets Arm; ere Angrebspunkterne faste, kaldes dog ofte deres Forbindelseslinie Armen; Produktet af en af Kræfterne og deres Afstand kaldes Momentet.

Momentet repræsenteres ved Længden af en ret Linie, idet Momentet 1 repræsenteres af en vilkaarlig valgt Længde. Momentet afsættes ud af en Linie, der er normal paa Kraftparrets Plan, og som kaldes Kraftparrets Akse. Man lader i Almindelighed Aksen gaa gennem Armens Midtpunkt, og Momentet afsættes da fra Midtpunktet til den Side af Planen, fra hvilken man vilde se Armen under Kræfternes Paavirkning dreje sig i samme Retning, som man ser Viserne dreje sig paa et Uhr. Momenterne regnes da positive eller negative, idet men vælger en positiv Retning paa Aksen.

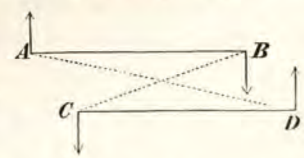
Dersom Armen var en homogen Stang, kan man umiddelbart indse, at denne under Paavirkning af Kraft-

parret maatte dreje sig om Stangens Midtpunkt; man maa imidlertid vel vogte sig for at tro, at et Legeme, det paavirkes af et Kraftpar, altid vil dreje sig om Kraftparrets Akse; vi ville senere vise, at et Kraftpar vel vil bringe er Legeme til at rotere, men at Rotationsaksen altid vil være en Linie gennem Legemets Tyngdepunkt, og at endogsaa denne Linies Retning kun undtagelsesvis falder sammen med Aksens Retning.

Kraftpars Ændring.

45. Et Kraftpar kan forskydes parallelt.

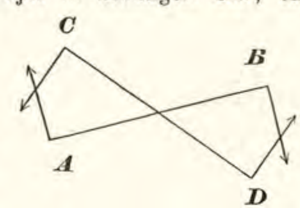
Lad $(P, -P)$ med Armen AB forskydes parallelt, saa at Armen falder i CD; vi give de to Kræfter i C og D modsatte Retninger og behøve da blot at bevise, at det ny Kraftpar og det givne ere i Ligevægt.



Nu kunne Kræfterne i C og B sammensættes til $2P$, virkende i Midtpunktet af CB, medens Kræfterne i A og D sammensættes til en Kraft $2P$, der er modsat den forrige og virker i Midtpunktet af AD; da nu AD og CB have samme Midtpunkt, holde de to Kraftpar hinanden i Ligevægt.

46. Et Kraftpar kan drejes om Armens Midtpunkt.

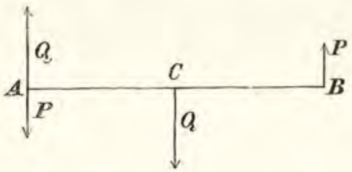
Lad Armen AB være drejet til Stillingen CD; ombytte vi Kræfterne i C og D med de modsatte, skal det ny Kraftpar og det givne holde hinanden i Ligevægt; man ser imidlertid let, at



Resultanten af Kræfterne i A og C er lig og modsat Resultanten af Kræfterne i B og D.

47. Armen og Kræfterne kunne ændres, naar blot Momentet bliver uforandret.

Ombyttes efter Ændringen Kræfterne med modsatte, skulle vi vise, at $(P, -P)$ med Armen AB og $(Q, -Q)$, med Armen AC holde hinanden i Ligevægt, idet $P.AB = Q.AC$. Denne Ligning viser, at Summen af de parallele Kræfters Momenter med Hensyn til Punktet A er Nul, og da desuden Kræfternes Sum er Nul, er der Ligevægt (27).



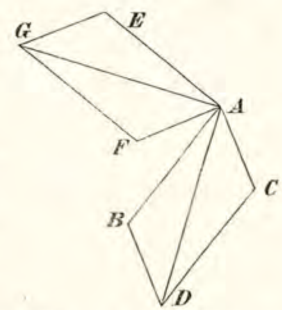
48. De nævnte Ændringer kunne kombineres, og vi kunne derved erstatte et Kraftpar ved et hvilket som helst andet, naar blot Aksens Retning og Momentets Størrelse ikke forandres; et Kraftpar er derfor fuldstændig defineret ved Længden og Retningen af den rette Linie, der repræsenterer Momentet. Vi have saaledes enkelte Kræfter og Kraftpar repræsenterede paa samme Maade, kun med den Forskel, at den rette Linie kun tør forskydes i sig selv, naar den forestiller en Kraft, medens den ogsaa tør forskydes parallelt, naar den forestiller et Kraftpar.

Kraftpars Sammensætning.

49. Have Kraftparrene parallele Akser, kunne vi give dem alle Armen 1; Kræfterne blive da lig Momenterne; vi kunne nu forskyde Kraftparrene, saa at deres Arme falde sammen, og sammensætte de Kræfter, der virke i

samme Endepunkt af Armen. Vi faa derved et Kraftpar, hvis Akse falder sammen med de givnes, og hvis Moment er den algebraiske Sum af de givne Kraftpars Momenter. Kraftpar med parallele Akser sammensættes altsaa, idet deres Momenter forskydes, saa at de gaa gennem samme Punkt, og sammensættes som enkelte Kræfter.

50. For at sammensætte to Kraftpar, der ikke have parallele Akser, omforme vi dem begge, saa at Kræfterne blive 1 og Armene altsaa lig Momenterne; vi dreje dem derpaa i deres Planer til Kræfterne blive parallele med Planernes Skæringslinie og forskyde dem nu, saa at de to Arme AB og AC have et Endepunkt fælles; i dette virker der to Kræfter 1 i samme Retning; de sammensættes til en Kraft 2, medens Kræfterne i B og C sammensættes til en Kraft 2, der virker i O, Midtpunktet af BC; de givne Kræfter ere nu erstattede ved et Kraftpar $(2, -2)$ med Armen AO, og dette Kraftpar erstattes atter ved et andet $(1, -1)$, hvis Arm $AD = 2AO$ er Diagonal i det ved AB og AC bestemte Parallelogram. Kraftparrenes Momenter ere lig Armene og kunne afsættes ud fra A ved at man drejer Armene en ret Vinkel i den Plan, i hvilken de alle tre ligge. Altsaa:



Kraftpar sammensættes, idet man forskyder deres Momenter til de gaa gennem samme Punkt og derpaa sammensætter dem som enkelte Kræfter.

FEMTE KAPITEL.

Hvilke som helst Kræfter, virkende paa fast forbundne Punkter.

Kræfternes Reduktion.

51. En Kraft kan forskydes parallelt, til den gaar gennem et givet Punkt, naar man tilføjer et vist Kraftpar.

Lad det givne Punkt være O, Kraften P; i O tilføje vi to, med P lige store og parallele, modsatte Kræfter; den givne Kraft er derved erstattet af Kraften P i O og Kraftparret $(P, \; - P)$, hvis Arm er den givne Krafts Afstand fra O.

52. Hvilke som helst Kræfter kunne sammensættes til en Enkeltkraft, der virker i et vilkaarligt givet Punkt, og et Kraftpar.

Vi flytte alle Kræfterne til det givne Punkt O og sammensætte dem der til en Enkeltkraft R; de ved Flytningen tilkomne Kraftpar sammensættes til et Kraftpar G. Da G kan forskydes parallelt, kunne vi tænke os G og R udgaaende fra samme Punkt. Ifølge Konstruktionen vil R blive den samme, hvor end Punktet vælges.

Da en Enkeltkraft og et Kraftpar ikke kunne holde hinanden i Ligevægt, blive Ligevægtsbetingelserne:

$$R = 0 \quad \text{og} \quad G = 0.$$

Systemets Centralakse.

53. Vi saa, at R var uafhængig af Beliggenheden af Punktet O; derimod vil G forandres, naar O flyttes.

Projektionen af G paa R er konstant.

Flytte vi nemlig R til en ny med R parallel Stilling, tilkommer et Kraftpar, hvis Akse er vinkelret paa R, og dette kan, ved at sammensættes med G, ikke forandre G's Komposant efter R.

Man kan altid vælge O saaledes, at G falder hen ad R.

Flytte vi R et Stykke p i en Retning vinkelret paa Planen RG, tilkommer et Kraftpar Rp, hvis Akse ligger i Planen RG og er vinkelret paa R. p kan da bestemmes saaledes, at dette Kraftpar og G,s Komposant vinkelret paa R tilintetgøre hinanden; tilbage bliver da R og G's Komposant efter R. Det er klart, at O kan vælges, hvor man vil i R, uden at G forandres.

Der eksisterer altsaa altid en Linie med den Egenskab, at baade R og G falde i Linien, naar Kræfterne forskydes, saa at de alle have et af Liniens Punkter til Angrebspunkt; denne Linie kaldes Centralaksen for Systemet af Kræfter.

54. Da G's Projektion paa R er ens for enhver Beliggenhed af O, faar G sin mindste Værdi, naar R falder i Centralaksen.

Beholde vi Betegnelsen G for denne mindste Værdi, og flytte vi R et Stykke p, tilkommer der et nyt Kraftpar Rp vinkelret paa G, der, sammensat med G, giver det ny Kraftpar:

$$G' = \sqrt{G^2 + R^2 p^2}, \tag{23}$$

der med G danner en Vinkel θ, bestemt ved:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Rp}{G}, \tag{24}$$

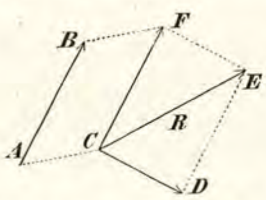
medens det er vinkelret paa p. G' beholder altsaa sin

Størrelse, naar R beskriver en cirkulær Cylinder med Centralaksen til Akse; G' er under denne Bevægelse fast forbundet med R og vil derfor beskrive en Omdrejnings-hyperboloide, hvis Strubecirkel har Radius p.

55. Det kan træffe sig, at Systemet af Kræfter har en enkelt Resultant; i dette Tilfælde maa man have $G = 0$, og Betingelsen er derfor, at man, for en vilkaarlig Beliggenhed af O, faar et resulterende Kraftpar, hvis Akse er vinkelret paa de til Punktet henførte Kræfters Resultant. I dette Tilfælde er nemlig den konstante Projektion af G' paa R Nul, og den anden Komposant af G' kan, som vi have set, altid tilintetgøres ved en passende Flytning.

56. Dersom Kræfterne ikke have en enkelt Resultant, kunne de altid paa uendelig mange Maader erstattes ved to Kræfter, der ikke skære hinanden. I alle Tilfælde faar imidlertid det Tetraeder, i hvilket de to Kræfter ere modstaaende Kanter, samme Volumen. (Chasles's Sætning).

Lad nemlig de to Kræfter være AB og CD; flyttes AB til CF, faa vi et Kraftpar, hvis Moment G' er lig Arealet AF, og en enkelt Kraft $R = CE$. Tetraedrets Volumen er $\frac{1}{6} G' . R \sin\theta$, idet θ er R's Vinkel med Planen AF; vi have imidlertid ovenfor vist, at R er konstant, og at $G' \sin\theta$ (G''s Projektion paa R) er konstant.

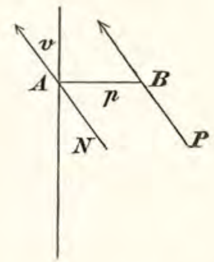


Til Chasles's Sætning kan føjes den, at den Linie, der forbinder Midtpunkterne af Tetraedrets to Kanter AC og BD, er konstant i Størrelse og Retning; den ses nemlig let at være parallel med og lig $\frac{1}{2} R$.

Kræfters Momenter med Hensyn til en Linie.

57. Ved en Krafts Moment med Hensyn til en Linie forstaar man Produktet af Kraftens Projektion paa en paa Linien vinkelret Plan og Kraftens korteste Afstand fra Linien. Momentet regnes med samme Fortegn, som det Kraftpar, der kommer til, naar Kraftens Projektion forskydes parallelt til Skæring med Linien.

Lad P være Kraften, $AB = p$ dens korteste Afstand fra Linien Z, v dens Vinkel med Z. Forskyde vi P til Stillingen AN, tilkommer et Kraftpar Pp, hvis Projektion paa Z er $Pp \sin v$, der netop ifølge den givne Definition er P's Moment med Hensyn til Z.



Flytte vi P fra Stillingen gennem A til et andet Punkt af Z, tilkommer et Kraftpar, hvis Projektion paa Z er Nul. Altsaa:

En Krafts Moment med Hensyn til en Linie er lig Projektionen paa Linien af det Kraftpar, som tilkommer, naar Kraften forskydes parallelt, til den skærer Linien i et hvilket som helst Punkt.

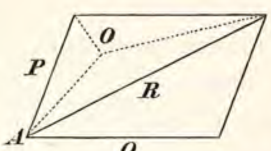
58. Have vi et System af Kræfter, og forskyde vi dem alle til de gaa gennem eet Punkt af Z, vil det resulterende Kraftpars Projektion paa Z være Summen af de enkelte Kraftpars Projektioner; man har altsaa, idet θ er den Vinkel, som det resulterende Kraftpar G' danner med Z,

$$\Sigma Pp \sin v = G' \cos\theta. \tag{25}$$

Summen af Kræfternes Momenter med Hensyn til en vilkaarlig Linie gennem et Punkt A er altsaa lig Projektionen paa Linien af det Kraftpar, som tilkommer, naar alle Kræfterne forskydes, til deres Angrebspunkter falde i A.

Er A givet, vil derfor Momentsummen blive størst for den Linie, hvis Retning falder sammen med Retningen af det resulterende Kraftpars Akse; for Linier gennem A, der danne samme Vinkel med G', bliver Momentsummen den samme.

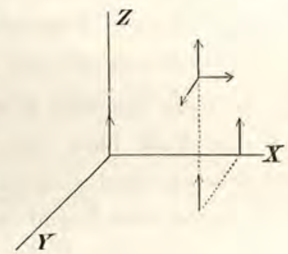
59. Ligge Kræfterne i samme Plan, og tage vi til Momentakse en Linie vinkelret paa Planen, blive Kræfternes Momenter med Hensyn til denne Linie de samme som deres Momenter med Hensyn til dens Skæringspunkt med Planen. (25) udtrykker da, at Summen af Kræfternes Momenter med Hensyn til et vilkaarligt Punkt er lig Momentet af det Kraftpar, man faar ved at flytte alle Kræfterne til Momentpunktet. Da man kan sammensætte Kræfterne, før man flytter dem, maa Resultantens Moment med Hensyn til et vilkaarligt Punkt være Summen af Komposanternes Momenter med Hensyn til det samme Punkt. Har Systemet ikke en enkelt Resultant, bliver Momentsummen lig det resulterende Kraftpars Moment. Man ser ogsaa let geometrisk, at Resultantens Moment er lig Summen af Komposanternes. Momenterne af P, Q og R med Hensyn til O ere nemlig de dobbelte Arealer af de Trekanter, der have Kræfterne til Grundlinier og O til Toppunkt, idet disse Arealer regnes med forskellige Fortegn,



naar Kræfterne ligge paa forskellige Sider af O. De tre Trekanter have imidlertid fælles Grundlinie AO og Afstanden fra Endepunktet af R til AO er lig Summen af de to andre Afstande. Idet Sætningen saaledes er bevist for to Kræfter, ser man da ved successiv Sammensætning, at den gælder almindelig. Kræfter i samme Plan, virkende paa et System af fast forbundne Punkter, ere derfor i Ligevægt, naar deres Resultant er Nul, og tillige Summen af deres Momenter med Hensyn til et vilkaarligt Punkt af Planen er Nul.

Analytisk Sammensætning af Kræfterne.

60. Lad Kraften P med Komposanterne X, Y og Z, have sit Angrebspunkt i (x, y, z). Z kan flyttes til (x, y) i XY-Pl. og derfra til Punktet x i X-Aksen; ved den sidste Flytning tilføjes Kraftparret yZ; flyttes Z derpaa til Begyndelsespunktet, tilføjes Kraftparret $-xZ$; paa samme Maade flyttes Angrebspunktet for X og Y til Begyndelsespunktet; derved tilføjes først Kraftparrene zX og $-yX$, dernæst xY og $-zY$; af de 6 Kraftpars Akser falde to paa hver af Koordinatakserne; adderes de sammenfaldende, have vi de tre Kraftpar:



$$yZ - zY;\quad zX - xZ;\quad xY - yX,$$

hvis Akser henholdsvis ere Systemets X, Y og Z-Akse. Have vi flere Kræfter, der alle flyttes til Begyndelsespunktet, faa vi saaledes 3 Enkeltkræfter, der falde udad Akserne, og tre Kraftpar, hvis Akser falde paa Koordinatakserne, nemlig:

$$A = \Sigma X;\quad B = \Sigma Y;\quad C = \Sigma Z; \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} L = \Sigma(yZ - zY);\quad M = \Sigma(zX - xZ);\\ N = \Sigma(xY - yX). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

De tre første sammensættes til een, hvis Størrelse og Vinkler med Akserne bestemmes ved:

$$\left.\begin{aligned} R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2};\\ \cos\alpha = \frac{A}{R};\quad \cos\beta = \frac{B}{R};\quad \cos\gamma = \frac{C}{R}; \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

de tre Kraftpar sammensættes til eet, hvis Størrelse og Vinkler med Akserne bestemmes ved:

$$\left.\begin{aligned} G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};\\ \cos\lambda = \frac{L}{G};\quad \cos\mu = \frac{M}{G};\quad \cos\nu = \frac{N}{G}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

61. Skal der være Ligevægt, maa R og G forsvinde, hvilket giver de 6 Ligevægtsbetingelser:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ L = 0,\ M = 0,\ N = 0. \tag{30}$$

Vi have forudsat, at Koordinatsystemet er retvinklet; i modsat Fald blive blot Udtrykkene for L, M og N multiplicerede med konstante Faktorer, saa at Ligevægtsbetingelserne ikke forandres.

Da L, M og N for et retvinklet Koordinatsystem ere det resulterende Kraftpars Projektioner paa Akserne eller ifølge 58 Summen af Kræfternes Momenter med Hensyn til Akserne, vise Ligningerne (30), at:

Naar et System af Kræfter er i Ligevægt, forsvinder Summen af Kræfternes Projektioner paa en vilkaarlig Linie og Summen af Kræfternes Momenter med Hensyn til en vilkaarlig Linie.

Omvendt have vi, at et System af Kræfter, der virker paa fast forbundne Punkter, er i Ligevægt, naar Summerne af Kræfternes Projektioner paa tre Linier gennem samme Punkt og ikke i samme Plan og Summerne af deres Momenter med Hensyn til tre saadanne Linier enkeltvis forsvinde.

62. Dersom Kræfterne ligge i samme Plan, og vi tage denne til xy-Pl., have vi for alle Kræfterne $z = 0$; $Z = 0$, hvorved Ligevægtsbetingelserne blive:

$$\Sigma X = 0;\quad \Sigma Y = 0;\quad \Sigma(xY - yX) = 0. \tag{31}$$

Den sidste Ligning udtrykker, at det resulterende Kraftpar, hidrørende fra Kræfternes Flytning til Begyndelsespunktet, er Nul. Har Kraften P Afstanden p fra Begyndelsespunktet, kan denne Ligning ogsaa skrives:

$$\Sigma Pp = 0, \tag{32}$$

idet Pp er det Kraftpar, som kommer til, naar P flyttes til Begyndelsespunktet, eller denne Krafts Moment med Hensyn til dette Punkt, og vi faa saaledes atter de i 59 for Kræfter i samme Plan fundne Ligevægtsbetingelser.

Enkelt Resultant.

63. Et givet System af Kræfter i Rummet kan have en enkelt Resultant; lad denne have Angrebspunktet (x, y, z) og Komposanterne X, Y og Z. Systemet er da i Ligevægt, naar en Kraft, lig og modsat Resultanten, tilføjes; idet de givne Kræfter tænkes sammensatte efter (26) og (27), faa vi derved:

$$\begin{gathered} A - X = 0;\quad B - Y = 0;\quad C - Z = 0;\\ L - (yZ - zY) = 0;\quad M - (zX - xZ) = 0;\\ N - (xY - yX) = 0. \end{gathered}$$

Af de tre første Ligninger faas Resultantens Komposanter bestemte ved:

$$X = A, \quad Y = B, \quad Z = C;$$

indsættes disse Værdier i de tre sidste Ligninger, og adderes disse derpaa, efter at de ere multiplicerede henholdsvis med A, B og C, faar man:

$$AL + BM + CN = 0, \tag{33}$$

der (naar blot ikke $A = B = C = 0$) udtrykker Betingelsen for, at Systemet har en enkelt Resultant. Vi fandt ovenfor (55) som Betingelse for en enkelt Resultant, at man, ved at flytte Kræfterne til et vilkaarligt Punkt, skulde faa et resulterende Kraftpar, hvis Akse var vinkelret paa Resultanten; da nu de to Linier danne Vinkler med Akserne, hvis coss. ere:

$$\frac{A}{R}, \quad \frac{B}{R}, \quad \frac{C}{R}, \quad \frac{L}{G}, \quad \frac{M}{G}, \quad \frac{N}{G},$$

komme vi herved netop til den ovenfor ad anden Vej fundne Betingelse.

Dersom Betingelsen (33) er opfyldt, skulle Koordinaterne til Resultantens Angrebspunkt bestemmes ved de tre Ligninger:

$$yC - zB = L, \quad zA - xC = M, \quad xB - yA = N. \tag{34}$$

Da den ene af disse kan udledes af de to andre, kan Angrebspunktet falde i et hvilket som helst Punkt af den Linie, der bestemmes ved to af de tre Ligninger. Da nu Angrebspunktet kan vælges, hvor man vil i Kraftens Retning, ville Ligningerne netop blive Resultantens Ligninger.

64. Er θ Vinklen mellem R og G, har man:

$$RG \cos\theta = AL + BM + CN. \tag{35}$$

Denne Størrelse, der er Nul, naar Systemet har en enkelt Resultant, er altsaa i alle Tilfælde konstant, det vil sige uafhængig af Koordinatsystemets Beliggenhed; den er netop

6 Gange det konstante Volumen af det Tetraeder, der bestemmes ved de to Enkeltkræfter, til hvilke Systemets Kræfter paa uendelig mange Maader kunne sammensættes (56).

Kræfter, der virke paa et ikke fuldkommen frit System af fast forbundne Punkter.

65. Et System med et fast Punkt. Dersom Systemet er frit bevægeligt om et fast Punkt, kan det betragtes som frit, naar den Reaktion, som hidrører fra det faste Punkt, tilføjes; har denne Komposanterne X, Y og Z, faa vi, naar det faste Punkt tages til Begyndelsespunkt,

$$A + X = 0, \quad B + Y = 0, \quad C + Z = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

de tre første Ligninger bestemme Reaktionen, der er lig og modsat Trykket paa det faste Punkt. De tre sidste Ligninger ere da Ligevægtsbetingelserne.

Et System med et fast Punkt er altsaa i Ligevægt, naar Kræfternes Momentsummer med Hensyn til tre Linier gennem det faste Punkt og ikke i samme Plan ere Nul.

66. System med to faste Punkter (fast Akse). Vi tage den faste Akse til Z-Akse, det ene faste Punkt til Begyndelsespunkt; det andet faste Punkt er $(0, 0, h)$; det første erstattes ved Reaktionen X_1, Y_1, Z_1, det andet ved Reaktionen X_2, Y_2, Z_2. Ligevægtsbetingelserne ere da:

$$A + X_1 + X_2 = 0; \quad B + Y_1 + Y_2 = 0;$$
$$C + Z_1 + Z_2 = 0;$$
$$L - hY_2 = 0; \quad M + hX_2 = 0; \quad N = 0.$$

De 5 første Ligninger bestemme X_2, Y_2, X_1, Y_1 og

$Z_1 + Z_2$. Man kan altsaa ikke bestemme Trykkets Komposanter efter Z-Aksen i de to Punkter, men kun disse Komposanters Sum.

Den eneste Ligevægtsbetingelse er nu:

$$N = 0. \tag{36}$$

Et System med to faste Punkter eller en fast Akse er altsaa i Ligevægt, naar Summen af Kræfternes Momenter med Hensyn til den faste Akse er Nul.

Hvis Systemet tillige kan glide langs den faste Akse, har man $Z_1 = Z_2 = 0$, saa at der til den opstillede Ligevægtsbetingelse kommer den ny:

$$C = 0. \tag{37}$$

67. System med en fast Plan. Lad et System kunne glide paa en fast Plan, som vi tage til xy-Pl.; den faste Plan udøver da i alle Støttepunkterne Reaktioner, parallele med Z-Aksen; disse Reaktioner have en Resultant, som vi ville betegne ved Z, og hvis Angrebspunkt er $(a, b, 0)$.

Ligevægtsbetingelserne ere nu:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C + Z = 0;$$
$$L - aZ = 0, \quad M + bZ = 0, \quad N = 0.$$

Af de tre Ligninger findes a, b og Z; Ligevægtsbetingelserne ere da:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad N = 0. \tag{38}$$

Z, virkende i $(a, b, 0)$, var Resultanten af de Tryk, som Planen udøver paa de af Systemets Punkter, der ligge i Planen; for at finde Trykkene i de enkelte af disse Punkter, maa man da opløse Z i flere parallele Kræfter med givne Angrebspunkter. Ere de søgte Tryk Z_1, Z_2, Z_3 . . ., Angrebspunkterne i xy-Pl. (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) . . ., har man nu:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots = Z,$$

$$a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + \ldots = aZ,$$
$$b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + b_3 Z_3 + \ldots = bZ.$$

Man ser heraf, at Opgaven er bestemt, naar der kun er tre Støttepunkter, medens den er ubestemt, naar der er flere. Hvor et Bord f. Eks. hviler paa fire Ben, kan man ikke bestemme det Tryk, som hvert enkelt Ben udøver paa Gulvet; i Virkeligheden udøver naturligvis hvert Ben et bestemt Tryk, men dettes Størrelse afhænger af fysiske Forhold, navnlig af Benenes Elasticitet.

68. Dersom Støttepunkterne ere bundne til Planen, ere de ovenfor opstillede Betingelser tilstrækkelige; dersom de derimod kunne fjerne sig fra Planen til den ene Side, maa (a, b) falde indenfor den konvekse Polygon, hvis Vinkelspidser ligge i Støttepunkterne (Understøtningsfladen), thi Fladens normale Reaktion Z er sammensat af parallele Kræfter i Støttepunkterne, der alle virke til samme Side, og man ser let, at Resultanten af saadanne Kræfter maa falde indenfor Polygonen, naar man tænker sig først to af Kræfterne sammensatte, derpaa deres Resultant og en tredje af Kræfterne o. s. v.

Anvendelser.

59. Lad Siderne af en plan Polygon, gennemløbne i samme Omløbsretning, repræsentere Kræfter. Hvorledes sammensættes disse Kræfter?

Summen af Projektionerne af en lukket Polygons Sider paa en vilkaarlig Linie er Nul. Summen af Momenterne med Hensyn til et vilkaarligt Punkt er lig Polygonens dobbelte Areal. Kræfterne kunne altsaa sammensættes til et Kraftpar, hvis Moment er Polygonens dobbelte Areal.

60. I hver Sideflade af et Polyeder virker et Kraftpar, lig Sidefladens Areal, og alle positive, sete udefra. Bevis, at de holde hinanden i Ligevægt.

Kraftparrene kunne, ifølge den forrige Opgave, erstattes ved Kræfter, der virke langs Kanterne. Af disse blive to og to lige store og modsatte.

61. En homogen Stang, hvis Længde er $2l$, og hvis Vægt er V, staar med sin nederste Ende A paa et glat Gulv, medens dens øverste Ende B ligger op imod en glat Væg. Bjælken hindres i at glide ved, at en horizontal Snor med Længden a forbinder dens nederste Ende med Muren. Find Trykkene og Spændingen i Snoren.

Paa Bjælken virker Spændingen T i Snoren, et vertikalt Tryk Y i A, et horizontalt Tryk X i B og Vægten V i Midtpunktet.

Man ser let, at der kun kan være Ligevægt, naar Snoren og Stangen ligge i en Plan vinkelret paa Gulvets og Væggens Skæringslinie og at $Y = - V$, $T = - X$.

Momenterne med Hensyn til A give:

$$X\sqrt{4\,l^2 - a^2} = \tfrac{1}{2}\,aV.$$

62. En Stang med Længden $2a$ og Vægten V støtter sin nederste Ende mod en glat, lodret Mur og hviler paa et fast Punkt i Afstanden a fra Muren. Den bærer desuden i sit øverste Endepunkt en Vægt P. Find Ligevægtsstillingen og Trykkene.

63. En Stang, som ovenfor, kan frit dreje sig om sit ene faste Endepunkt, medens det andet holdes oppe ved en Snor uden Vægt, der gaar over en lille Tridse og bærer en Vægt. Find Ligevægtsstillingen og Trykket i det faste Punkt. (Naar en Snor gaar over en fast Tridse, have de to Snorstykker samme Spænding).

64. En Stang hviler paa Kanten og Bunden af en halvkugleformig Skaal; find Ligevægtsstillingen og Trykkene.

65. En homogen Stang med Længde $2a$ og Vægt V støtter sig mod en horizontal og mod en vertikal Plan. Et givet Punkt af Stangen er ved en Snor fæstet til et fast Punkt af Planernes Skæringslinie. Find Tryk og Spænding.

66. En homogen, rektangulær, tynd Plade med Vægten V kan dreje sig om sin ene Kant, der danner en Vinkel paa 30° med Horizontalplanen. En vertikal Snor er fastgjort i Midtpunktet af den modstaaende Kant og holder Pladen, saa at den danner en Vinkel paa 30° med en lodret Plan gennem den faste Kant. Hvor stor er Spændingen i Snoren, naar Pladens Bredde er a?

67. En homogen ret Kegle hviler i sin omskrevne Kugle. Hvor stor er Keglens Toppunktsvinkel, naar den er i Ligevægt i enhver Stilling i Kuglen?

68. Et cylinderformet Kar (uden Vægt), hvis Højde er dobbelt saa stor som Grundfladens Diameter, er halvt fyldt med Vand; det hviler paa en Skraaplan, hvor det ikke kan glide; hvor stor er Skraaplanens Heldningsvinkel, naar Karret er paa Nippet til at vælte?

69. Fire tynde Stænger uden Vægt danne et Parallelogram med foranderlig Vinkel. Der er Ligevægt, idet to elastiske Snore ere udspændte som Diagonaler. Spændingen i den ene Snor repræsenteres ved dens Længde; bevis, at Spændingen i den anden Snor ogsaa repræsenteres ved dens Længde.

70. Undersøg Ligevægtsbetingelserne og Trykkene i Taplejerne ved den almindelige Vinde.

71. Giv en Udvikling af alle de forskellige Betydninger af Ordet Moment.

72. En Kugle hviler mellem to Skraaplaner med samme Heldning. Find den mindste Værdi, denne kan have, naar Ligevægt skal vedblive at finde Sted, hvis Kuglen halveres af en vertikal Plan gennem Skraaplanernes Kant.

73. En tynd, homogen, trekantet Skive er hængt op ved en Snor, der forbinder de to Vinkelspidser og gaar over en lille, fast Tridse. I Ligevægtsstillingen er den ene af Trekantens Sider lodret. Bevis, at de to Snorstykkers Længder forholde sig som 1 : 2, og at Snorens hele Længde er det dobbelte af Medianen til Trekantens øverste Punkt.

74. En Cirkelbue paa g^0 uden Vægt hviler med Konkaviteten opefter paa en horizontal Plan og bærer i sine Endepunkter Vægtene P og Q; find Ligevægtsstillingen.

75. Et System af Kræfter i samme Plan angribe fast forbundne Punkter. Bevis, at dersom Kræfterne drejes lige store Vinkler om deres Angrebspunkter, vil Resultanten drejes den samme Vinkel om et fast Punkt.

76. Langs tre ikke sammenstødende Kanter af et retvinklet Parallelepipedum virke lige store Kræfter. Bevis, at Betingelsen for, at disse have en enkelt Resultant, er, at den ene Kant er lig Summen af de to andre.

77. To Kraftpar dannes af Kræfter, der ere uforanderlige i Størrelse og Retning og angribe Endepunkterne af to parallele Linier. Bevis, at Ligevægt mellem Kraftparrene ikke forstyrres, hvis det Legeme, til hvilket Angrebspunkterne høre, forandrer sin Stilling.

78. Bevis, at det geometriske Sted for de Linier gennem et givet Punkt, med Hensyn til hvilke Summen af Momenterne af et givet Sytem af Kræfter er Nul, er en Plan.

79. Bevis, at der i enhver Plan findes et Punkt, for hvilket Planen er det i forrige Opgave nævnte geometriske Sted.

80. Et System af Kræfter i samme Plan er i Ligevægt. Kræfterne drejes i Planen lige store Vinkler om deres Angrebspunkter. Bevis, at de nu danne et Kraftpar, og angiv, hvorledes dettes Moment varierer med Vinklen.

SJETTE KAPITEL.

Om astatisk Ligevægt.

69. Dersom et Legeme eller et System af fast forbundne Punkter angribes af Kræfter og er i Ligevægt, kaldes denne astatisk, hvis den ikke forstyrres, naar Legemets Stilling forandres, medens Kræfterne beholde deres Størrelser og Retninger. Kræfter, der angribe samme Punkt, og parallele Kræfter, der angribe et Legeme, have tidligere vist os Eksempler paa astatisk Ligevægt. For at finde Betingelserne for en saadan Ligevægt i Almindelighed, ville vi betragte den astatiske Reduktion af et givet Kraftsystem, det vil sige en saadan Reduktion, som er uafhængig af Legemets Stilling.

70. Systemets Resultant er ikke Nul. Vi opløse enhver af de givne Kræfter efter tre paa hverandre vinkelrette Akser, der danne lige store Vinkler med Resultantens Retning. Vi faa derved tre Systemer af parallele Kræfter. Ethvert af disse kan astatisk erstattes ved en enkelt Kraft, der angriber Systemets Centrum, og paa Grund af det valgte Aksesystem blive de tre Kræfter lige store og vinkelrette paa hverandre.

Et System af Kræfter, hvis Resultant ikke er Nul, kan derfor altid erstattes ved tre lige store, paa hverandre vinkelrette, Kræfter, der angribe tre faste Punkter i Legemet.

71. Dersom vi benytte en ny Opløsningsretning, kunne vi gaa ud fra det reducerede System, og det til den ny Retning svarende Centrum maa da falde i den ved de tre Centrer bestemte Plan. De til alle Retninger svarende Centrer falde derfor i en i Legemet fast Plan, der kaldes Systemets Centralplan.

Særlig ville vi lægge z-Aksen i Resultantens Retning. Det dertil svarende Centrum O kaldes Systemets Centralpunkt. De to andre Centrer falde uendelig fjernt, da de to Systemer reduceres til to Kraftpar. Da Legemets Stilling er vilkaarlig, lægge vi det saaledes, at Centralplanen er vinkelret paa Resultanten, og vælge O til Begyndelsespunkt. Resultanten tages til Enhed for Kræfterne.

For at undgaa de to uendelig fjerne Centrer, tilføje vi i O, langs den vilkaarlig valgte x-Akse, to Kræfter $+1$ og -1; den første sammensættes med Systemets med x-Aksen parallele Komposanter og giver en Resultant $+1$, der angriber et Punkt A i Centralplanen. Vi have saaledes et Kraftpar $(-1, 1)$ med Armen OA. Paa lignende Maade faa vi Komposanterne efter y-Aksen erstattede ved et Kraftpar $(-1, 1)$, virkende paa en Arm OB. Ethvert af disse Kraftpar kan ændres efter de sædvanlige Regler for Kraftpars Ændring, kun at Armens Retning ikke tør forandres. Rigtigheden af de andre Ændringer kan nemlig bevises ved Sætningerne om parallele Kræfters Sammensætning, medens man, for at bevise Sætningen om Armens Drejning, maa benytte den Sætning, at en Krafts Angrebspunkt kan forskydes i Kraftens Retning, og denne Sætning gælder ikke for astatiske Ændringer.

72. Vi ville nu undersøge, hvorledes Punkterne A og B ville falde, dersom vi benytte to andre paa hinanden vinkelrette Opløsningsretninger i xy-Pl. Lad disse Retninger være X_1 og Y_1, hvor $(XX_1) = (YY_1) = v$, og lad A og B have Koordinaterne x_1 og y_2, idet vi ved Sammensætningen benytte et skævvinklet System med Akserne OA og OB. Vi tilføje da i Retningen X_1 Kræfterne $+1$ og -1 og faa det til denne Retning svarende Centrum bestemt ved:

$$\xi_1 = x_1 \cos v; \quad \eta_1 = y_2 \sin v,$$

og paa lignende Maade for det ny Punkt B:

$$\xi_2 = - x_1 \sin v; \quad \eta_2 = y_2 \cos v.$$

De fundne Ligninger vise, at begge Punkter beskrive Ellipsen:

$$\frac{\xi^2}{x_1{}^2} + \frac{\eta^2}{y_2{}^2} = 1,$$

og denne Lignings Form viser, at OA og OB ere konjugerede Halvdiametre; da nu OA og OB vare bestemte for to vilkaarlige paa hinanden vinkelrette Opløsningsretninger, have vi følgende Sætning: Naar de to paa hinanden vinkelrette Opløsningsretninger i Centralplanen forandres, beskrive A og B en Ellipse med Centrum i O, og OA og OB ere stedse to konjugerede Halvdiametre.

Opløsningsretningerne kunne derfor vælges saaledes, at OA og OB ere Ellipsens Halvakser; vi lægge de to Akser paa disse; xz-Pl. og yz-Pl. ere da to i Legemet faste Planer, de saakaldte Middelplaner. Da de to Kræfter i A og B ere vinkelrette paa hinanden, kan Legemet drejes saaledes om z-Aksen, at de to Kræfter falde henholdsvis i x-Aksen og y-Aksen, og Systemet er da saa simpelt som muligt.

Man kan altsaa altid give Legemet en saadan Stilling, at Kræfterne astatisk kunne erstattes ved

to Kræfter $+1$, der angribe Punkter i x-Aksen og y-Aksen, og hvis Retninger falde sammen med disse Aksers,

to Kræfter, der virke i O, og som ere lig og modsatte de forrige,

en Kraft af samme Størrelse, der angriber O, og hvis Retning falder sammen med z-Aksens.

I denne Stilling er xy-Pl. Systemets Centralplan, de to andre Koordinatplaner ere Middelplanerne og Begyndelsespunktet er Centralpunktet.

73. Systemets Resultant er Nul. Vi vælge et vilkaarligt, retvinklet Koordinatsystem og gaa frem som ovenfor, idet vi ogsaa i Begyndelsespunktet O tilføje to Kræfter, $+1$ og -1, liggende i z-Aksen. Systemet reduceres derved til tre Kraftpar $(-1, 1)$ med Arme OA, OB og OC.

Paa samme Maade som ovenfor vises da, at OA, OB og OC ere konjugerede Halvdiametre i en Ellipsoide, der er fast i Legemet, og som, naar O vælges i et nyt Punkt, blot forskydes parallelt. Opløsningsretningerne kunne vælges saaledes, at A, B og C blive Toppunkter af Ellipsoiden, og ved en Drejning af Legemet bringes OA, OB og OC til at indeholde de i A, B og C virkende Kræfter. Altsaa:

Idet O er et vilkaarligt Punkt, kan man altid give Legemet en saadan Stilling, at Kræfterne astatisk kunne erstattes ved

tre Kræfter $+1$, der angribe Punkter af Akserne, og hvis Retninger falde sammen med Aksernes, og

tre Kræfter, der virke i O og ere modsatte de forrige.

Dersom et af Centrerne falder i O, er det tilsvarende

Kraftpar Nul, og det ene System af Komposanter er for sig i Ligevægt. Det Tilfælde, hvor Resultanten ikke er Nul, kan føres tilbage til det her behandlede ved Tilføjelsen af en Kraft, lig og modsat Resultanten, i et vilkaarligt Punkt. De til de forskellige Punkter svarende Ellipsoider ere da ikke kongruente.

74. Betingelser for astatisk Ligevægt. Dersom Systemet er i Ligevægt, er Resultanten Nul, og vi reducere da Systemet til de seks ovenfor nævnte Kræfter. Dersom A og B falde i O, men C ikke, vil en Drejning om x-Aksen forstyrre Ligevægten; det samme gælder, dersom C falder i O, men A og B ikke. Vi kunne derfor forudsætte, at intet af Punkterne A, B, C falde i O. Af de tre Koordinater til disse Punkter, der ikke ere Nul, maa mindst to have samme Tegn. Lad f. Eksp. A og B begge falde i de positive eller begge i de negative Dele af x-Aksen og y-Aksen. Man ser da let, at en Drejning om z-Aksen giver to Kraftpar med Armene OA og OB, der virke til Drejning i samme Retning, saa at Ligevægt er umulig. Den astatiske Ligevægt er derfor kun mulig, dersom baade A, B og C falde i O. I dette Tilfælde ere de tre Systemer af Komposanter hver for sig i Ligevægt og Systemet derfor virkelig i astatisk Ligevægt. Til astatisk Ligevægt er det derfor nødvendigt og tilstrækkeligt, at de givne Kræfters Komposanter efter tre paa hverandre vinkelrette Retninger (og derfor efter alle Retninger) hver for sig danne et System i Ligevægt.

75. Dersom der ikke er astatisk Ligevægt, kan man undersøge, om Systemet har en enkelt astatisk Resultant. Denne er da bestemt i Retning og Størrelse ved de givne

Kræfters Størrelser og Retninger. Spørgsmaalet er derfor, om der gives et saadant Punkt, at vi, ved deri at anbringe en Kraft, lig og modsat Resultanten, tilvejebringe astatisk Ligevægt. Opløse vi nu efter tre paa hverandre vinkelrette Retninger, af hvilke ingen er vinkelret paa Resultanten, faa vi tre Systemer, der hver for sig skal være i Ligevægt; dette kræver, at de givne Kræfters Komposanter for hver Retning giver en Resultant, der er lig og modsat den tilføjede Krafts Komposant, og som har samme Angrebspunkt. Betingelsen for en enkelt astatisk Resultant er derfor, at Centrerne for de tre Sæt Komposanter falde sammen i eet Punkt. (Det astatiske Centrum).

Herved udledes let Betingelsen for, at Systemet astatisk kan erstattes ved to Kræfter. Er dette Tilfældet, maa nemlig Tilføjelsen af een Kraft reducere Tilfældet til det foregaaende, altsaa bringe de tre Centrer til at falde sammen. Ere Centrerne A, B og C, og tilføjes Kraften i et Punkt O, faa vi for A, B og C tre ny Punkter, der henholdsvis falde i Linierne OA, OB og OC. De kunne derfor kun falde sammen, dersom A, B og C ligge i en ret Linie, men er dette Tilfældet, ser man let, at baade O og det Punkt, i hvilke A, B og C skulle falde sammen, kunne vælges vilkaarligt i den rette Linie.

Systemet kan altsaa kun erstattes ved to Kræfter, dersom de tre Centrer falde i en ret Linie (den astatiske Akse), men er dette Tilfældet, kan Systemet erstattes ved to Kræfter, der angribe to vilkaarlige Punkter af den rette Linie.

76. Dersom Systemets Resultant ikke er Nul, have vi set, at det paa uendelig mange Maader kan erstattes ved tre Kræfter, hvis Angrebspunkter ligge i Centralplanen.

Produktet af Arealet af den ved Angrebspunkterne bestemte Trekant og af Volumen af den Pyramide, i hvilken de tre Kræfter ere sammenstødende Kanter, er konstant. For at bevise denne Sætning er det tilstrækkeligt at vise, at den er rigtig, naar et af Angrebspunkterne flyttes vilkaarligt, medens de to andre blive liggende, da man ved tre saadanne successive Forskydninger kan bringe alle Angrebspunkterne til at falde i vilkaarligt givne Punkter. Lad nu Angrebspunkterne være A, B, C med Kræfterne P, Q, R. C ønskes flyttet til C_1. R opløses da i tre dermed parallele Kræfter R_1, R_2, R_3 med Angrebspunkterne A, B, C_1. De to Tetraedre ere da bestemte ved Kanterne:

$$P,\ Q,\ R \text{ og } P \dotplus R_1,\ Q \dotplus R_2,\ R_3,$$

hvor $\dotplus$ betegner den statiske Addition (Kræfternes Sammensætning). Nu er det sidste Tetraeder Summen af de to

$$P,\ Q \dotplus R_2,\ R_3 \text{ og } R_1,\ Q \dotplus R_2,\ R_3,$$

da de tre Tetraedre have en fælles Grundflade, medens Højden i det første er Summen af Højderne i de to andre. Deles hvert af de to Tetraedre paa samme Maade, faar man fire Tetraedre, af hvilke de tre ere Nul, da alle Kræfterne R ere parallele. Det, der ikke er Nul, er

$$P,\ Q,\ R_3,$$

der forholder sig til P, Q, R som R_3 til R. De to Trekanters Arealer forholde sig imidlertid som R til R_3, og derved er Sætningen bevist.

77. Enkelt Resultant. Vi ville bestemme de Stillinger af Legemet, for hvilke de givne Kræfter have en enkelt Resultant, og søge dennes Beliggenhed i Legemet. Vi benytte da den i 72 givne Reduktion og holde Legemet fast, medens vi dreje Kræfterne uden at forandre deres indbyrdes Stilling. Betegne vi ved α, β, γ Retningscosinusser, have vi da, efter en Drejning, i Punkterne:

$$x_1,\ 0,\ 0;\quad 0,\ y_1,\ 0;\quad 0,\ 0,\ 0$$

Kræfter med Komposanterne:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad -\alpha,\ -\beta,\ -\gamma;$$
$$-\alpha_1,\ -\beta_1,\ -\gamma_1,$$

hvor disse tilfredsstille de bekendte Ligninger, der udtrykke, at de tre Retninger ere vinkelrette paa hverandre. Man har da med de sædvanlige Betegnelser:

$$A = \alpha_2;\quad B = \beta_2;\quad C = \gamma_2;$$
$$L = y_1 \gamma_1;\quad M = -x_1 \gamma;\quad N = x_1 \beta - y_1 \alpha_1,$$

saa at Betingelsen for enkelt Resultant er:

$$x_1 (\gamma_2 \beta - \beta_2 \gamma) + y_1 (\alpha_2 \gamma_1 - \gamma_2 \alpha_1) = 0,$$

medens Resultanten faar Ligningerne (34):

$$y \gamma_2 - z \beta_2 = y_1 \gamma_1;\quad z \alpha_2 - x \gamma_2 = -x_1 \gamma;$$
$$x \beta_2 - y \alpha_2 = x_1 \beta - y_1 \alpha_1.$$

Betingelsen for enkelt Resultant kan skrives simplere. Af Ligningerne:

$$\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1 = 0;\quad \alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \gamma_1 = 0$$

faar man nemlig:

$$\frac{\alpha_1}{\beta \gamma_2 - \gamma \beta_2} = \frac{\beta_1}{\gamma \alpha_2 - \alpha \gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\alpha \beta_2 - \beta \alpha_2};$$

her er Summen af Tællernes Kvadrater 1, og det samme gælder om Summen af Nævnernes Kvadrater, idet

$$\beta^2 (\gamma_2^2 + \alpha_2^2) + \gamma^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) + \alpha^2 (\beta_2^2 + \gamma_2^2) - 2 \beta \gamma \beta_2 \gamma_2$$
$$- 2 \alpha \gamma \alpha_2 \gamma_2 - 2 \alpha \beta \alpha_2 \beta_2$$
$$= \beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - (\beta \beta_2 + \alpha \alpha_2 + \gamma \gamma_2)^2 = 1.$$

Forholdene ere altsaa ± 1, men Betragtning af Begyndelsesstillingen og af det andet Forhold viser, at man skal bruge Fortegnet $-$. Man har derfor:

$$\gamma_2 \beta - \beta_2 \gamma = -\alpha_1$$

og paa lignende Maade:

$$\alpha_2 \gamma_1 - \gamma_2 \alpha_1 = \beta,$$

hvorved Betingelsen for enkelt Resultant bliver:

$$y_1 \beta = x_1 \alpha_1.$$

Til at bestemme det geometriske Sted for Resultantens Skæringspunkt med den ene Middelplan $y = 0$, have vi altsaa Ligningerne:

$$-z\beta_2 = y_1 \gamma_1; \quad x\beta_2 = x_1 \beta - y_1 \alpha_1; \quad y_1 \beta = x_1 \alpha_1;$$

nu er $\quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$

eller $\quad \alpha_1^2 + \gamma_1^2 - \beta^2 = \beta_2^2.$

Indsættes heri Værdierne for α_1, β og γ_1, tagne af de tre Ligninger, faar man:

$$\frac{z^2}{y_1^2} + \frac{x^2}{y_1^2 - x_1^2} = 1$$

og paa lignende Maade for Skæring med den anden Middelplan, $x = 0$:

$$\frac{z^2}{x_1^2} + \frac{y^2}{x_1^2 - y_1^2} = 1.$$

I de Stillinger, i hvilke Systemet har enkelt Resultant, skærer denne derfor en Ellipse og en Hyperbel, der have deres fælles Centrum i Centralpunktet, og som ligge saaledes i de to Middelplaner, at den enes Toppunkter er den andens Brændpunkter. (Mindings Sætning).

Heraf følger, at der i Almindelighed er fire Stillinger af Resultanten, der gaar gennem et givet Punkt af Legemet, nemlig Skæringslinierne for de to Keglefladen, der have deres Toppunkt i det givne Punkt og de to Keglesnit til Ledekurver; ligger det givne Punkt i et af Keglesnittene, faar man som geometrisk Sted for Resultanten en Omdrejningskegleflade gennem det andet Keglesnit (det ene Keglesnit er som bekendt geometrisk Sted for Toppunkterne af de Omdrejningskeglefladen, der kunne lægges gennem det andet Keglesnit), og denne Kegleflade

bliver til en af Middelplanerne, naar Punktet ligger i et af de fire Punkter, der ere Toppunkter eller Brændpunkter for de to Keglesnit. Man ser ogsaa let, at dersom Legemet drejes om x-Aksen eller y-Aksen, har Systemet stadig en enkelt Resultant gennem et af de fire Punkter.

78. System, hvis Resultant er Nul. For et System, hvis Resultant er Nul, ville vi søge at bestemme de Stillinger af Legemet, i hvilke der er Ligevægt. Vi tilføje da i et vilkaarligt Punkt O en vilkaarlig Kraft, og Opgaven er da den, at bestemme de Stillinger, for hvilke Systemet har en enkelt Resultant gennem O. Da nu O bliver Centralpunkt, kan Resultanten kun være Linien gennem O og gennem de fire Toppunkter og Brændpunkter. Hertil svarer imidlertid fire Stillinger af Legemet, nemlig foruden Hovedstillingen de tre andre, som faas ved at dreje Legemet 180° om en af Akserne. I specielle Tilfælde kan der være Ligevægt i flere Stillinger. Særlig ville vi søge Betingelserne for, at Ligevægten ikke forstyrres, naar Legemet drejes om en Akse. Det er naturligvis kun dennes Retning og ikke dens Beliggenhed, der har Betydning.

79. Lad os tænke os z-Aksen i Omdrejningsaksens Retning og reducere Systemet til tre Kraftpar med Kræfterne -1, 1 og med Armene OA, OB og OC. Idet Koordinaterne til A, B og C ere $x_1, y_1, z_1, x_2 \ldots$, har man da:

$$L = y_3 - z_2; \quad M = z_1 - x_3; \quad N = x_2 - y_1,$$

der maa være Nul for enhver Værdi af θ, naar vi for x sætte $x \cos\theta - y \sin\theta$ og for y sætte $x \sin\theta + y \cos\theta$. Dette fordrer:

$$z_1 = z_2 = 0; \quad x_3 = y_3 = 0; \quad x_2 = y_1; \quad y_2 = -x_1.$$

Disse Ligninger vise, at OA, OB og OC maa være vinkelrette paa hverandre, og at $OA = OB$. Altsaa: Den Ellipsoide, for hvilken Armene ere konjugerede Halvdiametre, maa være en Omdrejningsellipsoide, og Omdrejningsaksen er da Ellipsoidens Omdrejningsakse. Drejer man Legemet, saa at $x_2 = y_1 = 0$, viser $y_2 = -x_1$ tillige, at OA og OB i Hovedstillingen maa have forskellige Fortegn.

Da Armene kunne forskydes parallelt, kan Resultatet ogsaa udtrykkes saaledes: Komposanterne af Kræfterne efter Omdrejningsaksen skulle være i Ligevægt, og de andre Komposanter skulle reduceres til to Kraftpar, hvis Planer ere vinkelrette paa Aksen, hvis Arme ere vinkelrette paa hinanden, og hvis Momenter ere lige store med modsatte Tegn.

80. Dersom Resultanten ikke er Nul, kunne vi søge at tilvejebringe Ligevægt for Drejning om en given Akse ved at tilføje to Kræfter. Vi tænke os da de givne Kræfter erstattede ved tre, X, Y, Z, med Angrebspunkterne A, B, C, idet z-Aksen er lagt i Omdrejningsaksens Retning. De to Kræfter, som skulle tilføjes, kunne vi ogsaa erstatte ved tre, hvis Angrebspunkter A_1, B_1, C_1 ligge i den ved Angrebspunkterne for de to bestemte rette Linie, og som ere parallele med Akserne. Til Ligevægt fordres da, at de tilføjede Kræfter ere $-X$, $-Y$ og $-Z$, og at $-Z$ og $+Z$ falde i samme rette Linie, saa at de under Drejningen stadig tilintetgøre hinanden. Vi have da de to Kraftpar $(X, -X)$ og $(Y, -Y)$, hvis Planer skulle være vinkelrette paa Z, og hvis Arme AA_1 og BB_1 skulle være vinkelrette paa hinanden.

Projiceres den sidste Arm paa det første Pars Plan i bb_1, ere A og b bekendte Punkter; AA_1 og bb_1 ere vinkelrette paa hinanden, og deres Forhold er bekendt $(Y:X)$. De have derfor et fast Drejningspunkt; lad dette være O*), medens Z skærer Planen i Q. Linien $A_1\,B_1\,C_1$ projiceres i $A_1\,b_1\,Q$; da $\triangle\, OAb \sim \triangle\, OA_1b_1$, blive Vinklerne ved A_1 og b_1 bekendte, og disse to Punkter have til geometriske Steder to Cirkler gennem O og Q. Den ene af disse Cirkler er Projektionen af en anden Cirkel, der er geometrisk Sted for B_1. $A_1\,B_1\,C_1$ vil altsaa stadig skære Z og de to faste Cirkler.

Trække vi gennem O en Linie, der skærer de to Cirkler i A_2 og b_1, kan denne opfattes som Projektion af en Linie $A_2\,B_2$, der til Ledekurver har de to Cirkler $A_1\,A_2$ og $B_1\,B_2$ samt en med Z parallel Linie gennem O. Nu er $A_1\,A_2 \neq b_1\,b_2 \neq B_1\,B_2$, saa at Linierne $A_1\,B_1\,C_1$ og $A_2\,B_2$ i alle deres Stillinger skære hinanden. De danne derfor de to Sæt Frembringere af en Hyperboloide med eet Net, hvis ene Sæt cirkulære Snit ere vinkelrette paa Z. Ligevægt under Drejningen kan derfor tilvejebringes ved Tilføjelse af to Kræfter, hvis Angrebspunkter ere to vilkaarlige Punkter af en vilkaarlig Frembringer af den ene Art af Hyperboloiden.

81. Dersom O falder i Q, reduceres Hyperboloiden til Linien Z, og de to Kræfter, der tilføjes, angribe Punkter af selve Omdrejningsaksen. En saadan Akse er af Möbius kaldt en Hovedakse. Den maa opfylde følgende Betingelser:

1) Den maa gaa gennem Centrum for de til dens Retning svarende Komposanter, og Kræfterne maa med Hensyn til den have Momentsummen Nul.

*) Man ser let, at dette Punkt er det samme som det faste Punkt i Resultanten af Kræfterne i A og b, der er omtalt i Opgave 75.

2) De to Planer, der indeholde Aksen og hver et af Centrerne for de andre Komposanter, maa være vinkelrette paa hinanden.

Den første Betingelse udtrykker, at de to tilføjede Kræfter tilvejebringe Ligevægt i den oprindelige Stilling, den anden, at Ligevægten vedligeholdes under Drejningen.

En nærmere Undersøgelse, som vi ikke ville gaa ind paa*), viser, at der i Reglen er to Hovedakser. Dersom Kræfterne kunne reduceres til to, findes Hovedakserne let. Den ene er Linien gennem de to Angrebspunkter. Den anden er vinkelret paa en med begge Kræfterne parallel Plan og gaar gennem det faste Punkt, som Resultanten af Kræfternes Projektioner paa Planen indeholder under Drejningen (Punktet O ved Konstruktionen ovenfor).

*) Denne Undersøgelse er gennemført i denne Bogs tyske Udgave.

SYVENDE KAPITEL.

Kræfter, der virke paa et System af Punkter, der ikke ere fast forbundne.

Ligevægtsbetingelser.

82. Vi ville nu betragte flere faste Legemer, som angribes af hvilke som helst Kræfter, og som ere forbundne med hinanden, dog saaledes, at Forbindelserne ikke forhindre, at Legemernes indbyrdes Stillinger kunne forandres. De vigtigste saadanne Forbindelser ere følgende:

1) To Legemers Overflader kunne røre hinanden. Ere Overfladerne fuldkommen haarde og glatte, vil da ethvert af dem udøve et Tryk paa det andet, som er rettet efter den fælles Normal; de to Tryk (Aktion og Reaktion) ere lige store og modsatte.

Finder Berøringen Sted i alle Punkter af en Del af Overfladerne, kan man ikke bestemme Trykkene i de enkelte Punkter, men deres Resultant.

2) Legemerne kunne være forbundne ved Snore eller Stænger; i Ligevægtsstillingen virke i ethvert Punkt af Snoren eller Stangen to lige store og modsatte Kræfter (Spændingen); Spændingerne maa virke til at stramme Snorene, men kunne ogsaa søge at sammentrykke Stængerne. Dersom Stængerne eller Snorene ere elastiske, maa deres Længder paa bekendt Maade afhænge af deres

Spænding. Er T Spændingen, l en Snors Længde, antages i Almindelighed:

$$l = l_0 (1 + \mu T),$$

hvor l_0 er den til $T = 0$ svarende Længde og μ er en af Snorens fysiske Beskaffenhed afhængig Konstant.

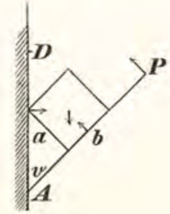
83. Hvert enkelt Legeme kan betragtes som frit, naar de Tryk eller Træk, som det underkastes gennem Forbindelserne med de andre Legemer, tilføjes. Derefter maa da for ethvert af Legemerne de 6 Ligevægtsbetingelser være tilfredsstillede. Man faar derved for hvert Legeme 6 Ligninger, og disse Ligninger, i Forbindelse med de rent geometriske Ligninger, som bestemme Legemerne og deres Forbindelser, kunne da tjene til Bestemmelse af Ligevægtsstillingen og af de ubekendte Tryk og Spændinger. Er der i et eller flere af Legemerne faste Punkter, Linier eller Planer, reduceres Antallet af Ligevægtsbetingelser, som tidligere vist. Ofte er det fordelagtigt at betragte alle Legemerne som fast forbundne i Ligevægtsstillingen, en Betragtning, der er tilladelig, da Ligevægten ikke kan forstyrres ved, at Forbindelserne i Ligevægtsstillingen gøres uforanderlige.

Anvendelser.

81. En homogen Terning, hvis Kant er a, og hvis Vægt er Q, hviler paa en Klap, der kan dreje sig om en i en vertikal Mur fastgjort horizontal Akse A. Terningen støtter sig med en horizontal Kant til Muren, og Klappen, der danner Vinklen v med Muren, holdes oppe ved en paa Klappen vinkelret Kraft P, der virker i Afstanden b fra A, i det vertikale Snit gennem Terningens Tyngdepunkt. Ligevægtsbetingelserne og Trykkene søges.

Man behøver kun at betragte det vertikale Snit. Her

er to Legemer, Terningen og Klappen. Paa Terningen virke tre Kræfter, Murens Reaktion P_1, Vægten Q, virkende i Tyngdepunktet, og Resultanten P_2 af de smaa normale Reaktioner af Klappen; denne Resultants Størrelse og Angrebspunkt kendes ikke, men dens Retning er normal paa Klappen.



Man faar nu ved Projektion paa AD og paa den derpaa vinkelrette Retning:

$$Q = P_2 \sin v; \quad P_1 = P_2 \cos v;$$

Momenterne tagne med Hensyn til A, give:

$$P_1 \, a \operatorname{cosec} v + \tfrac{1}{2} Q (a \cos v + a \sin v) = x P_2,$$

idet $\frac{a}{2}(\cos v + \sin v)$ er Tyngdepunktets Afstand fra Muren, og x er Afstanden fra A til Angrebspunktet for P_2.

Da Klappen har en fast Akse, behøve vi kun at tage Momenterne med Hensyn til denne; derved faas:

$$Pb = P_2 \, . \, x.$$

De fundne Ligninger bestemme P og Trykkene, idet b v, a og Q tænkes givne.

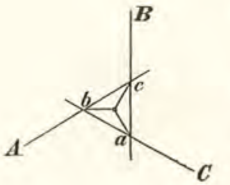
Ønske vi at kende Trykket i A, behøve vi blot at projicere de paa Klappen virkende Kræfter paa en paa denne vinkelret Linie; Trykket bliver parallelt med P og findes ved at flytte P og P_2 til A.

82. Tre tynde Stænger danne en Bro mellem A, B og C, idet enhver af Stængerne gaar under den første, den møder, og over den anden; de bære en Vægt V, der understøttes i a, b og c, og hvis Tyngdepunkt har Afstandene l_a, l_b, l_c, fra Siderne af ABC, medens det falder sammen med Tyngdepunktet for Trekanten abc.

Trykkene i A, B og C bestemmes, idet det hele System tages som fast, og Momenterne tages med Hensyn til AB, AC og BC; derved faas:

$$T_A h_a = V l_a; \quad T_B h_b = V l_b; \quad T_C h_c = V l_c,$$

hvor h_a, h_b og h_c ere Højderne i $\triangle ABC$.



For Trykkene i a, b og c faas, idet man tager Momenterne for en Stang med Hensyn til et af disse Punkter:

$$T_A \,.\, Ab = \left(T_c - \frac{V}{3}\right) bc;$$

$$T_B \,.\, Bc = \left(T_a - \frac{V}{3}\right) ca; \quad T_C \,.\, Ca = \left(T_b - \frac{V}{3}\right) ab.$$

Endvidere er:

$$T_b = T_A + T_c - \frac{V}{3}; \quad T_c = T_B + T_a - \frac{V}{3};$$

$$T_a = T_C + T_b - \frac{V}{3}.$$

Disse Ligninger bestemme de søgte Størrelser og give desuden Relationer mellem de givne Stykker.

83. To lige store Kugler med Radius r og Vægt V hvile paa to Skraaplaner og røre hinanden; find Ligevægtsstillingen og Trykkene. Skraaplanernes Heldninger ere v og v_1.

84. To tunge Partikler med samme Vægt V hvile paa to Skraaplaner, hvis Heldninger ere v og v_1. De ere forbundne ved en Snor uden Vægt, der har Længden l og gaar over en lille Tridse, som er anbragt i Højden a over Skraaplanernes horizontale Skæringslinie; find Ligevægtsstillingen, Spændingen og Trykkene.

85. Fire tynde Stænger danne et Rektangel med Hængsler i Vinkelspidserne. De to Sider ere horizontale og kunne dreje sig i Rektanglets Plan om deres Midtpunkter. De to ere vertikale, og til hver af dem er i et vilkaarligt

Punkt fastgjort en horizontal Stang (i Rektanglets Plan), der i et vilkaarligt Punkt bærer en Vægt V. Bevis, at der er Ligevægt, selv om Systemets Stilling ændres ved Drejning om de faste Punkter. (Robervals Vægt).

De to Vægte flyttes til de vertikale Stænger og derpaa til de to andre Stænger. De holde da hinanden i Ligevægt, idet de i Understøttelsespunkterne frembringe vertikale Tryk, der hvert for sig er ubestemt, men hvis Sum er $2\,V$. (I Virkeligheden behøver det ene Midtpunkt kun at være hindret i Bevægelser til Siden). De to ved Flytningen frembragte Kraftpar ændres, saa at Kræfterne gaa gennem de faste Punkter, og ophæves da af disses Reaktion. Ere de to Vægtes Afstande ulige store, bliver derfor hele Apparatet underkastet et Sidetryk, saa at det, hvis det er opstillet paa en Fod, kan vælte, hvis denne ikke er tilstrækkelig bred.

86. Et vilkaarligt Antal ved Hængsler forbundne Stænger danne en indskrivelig Polygon. Stængerne angribes i deres Midtpunkter af Kræfter, der ere proportionale med Stængernes Længder, og som ere rettede udefter efter den vinkelrette paa Stangen. Bevis, at der er Ligevægt, og at Trykkene i Vinkelspidserne ere rettede efter den omskrevne Cirkels Tangenter. Kraftpolygonen bliver ligedannet med Stangpolygonen

87. En Trekant med tre homogene Sider hviler i en vertikal Plan paa den ene Side; bestem Trykket i Toppunktet.

88. To homogene Kugler med Radierne r og r_1, Vægtene V og V_1, ere ophængte i samme faste Punkt ved Snore af Længden l. Find Ligevægtsstilling, Tryk og Spændinger.

89. To Cylindre med Radierne r og r_1, ere bundne sammen ved en Snor med Spændingen T. Find Trykket

mellem Cylindrene. (Betragt de krumme Dele af Snoren som fast forbundne med Cylindrene).

90. I en tynd, i begge Ender aaben, lodret cylinderformig Skal, der staar paa en horizontal Plan, hvile to lige store homogene Kugler med Vægt V. Cylindrens Radius er R, Kuglernes r, hvor $r > \frac{1}{2} R$. Hvor stor er Cylindrens Vægt, naar den er paa Nippet til at vælte?

Tag Momenterne af de paa Cylindren virkende Kræfter med Hensyn til det Punkt, om hvilket Væltningen vilde foregaa, og som derfor, i det Øjeblik, da Væltningen begynder, modtager hele den horizontale Plans Tryk.

OTTENDE KAPITEL.

Tovpolygoner.

Retlinede Snorstykker.

84. Dersom Kræfterne paavirke et Tov, maa vi skelne mellem to Hovedtilfælde, idet Kræfterne kunne have bestemte eller foranderlige Punkter af Tovet til Angrebspunkter. Det første Tilfælde vil f. Eks. indtræde, dersom der udøves Træk ved Snore, som ere knyttede fast til Tovet i forskellige af dets Punkter; det andet Tilfælde indtræder, dersom de Snore,

ved hvilket Trækket udøves, ere knyttede til Ringe, som, uden Gnidningsmodstand, frit kunne bevæge sig paa Tovet.

85. Faste Angrebspunkter. Dersom Tovet er i Ligevægt, kan det betragtes som et fast System; heraf følger, at alle de paavirkende Kræfter, henførte til samme Punkt, maa holde hinanden i Ligevægt. Tovet kan tænkes overskaaret i et vilkaarligt Punkt, naar Spændingen i det overskaarne Stykke sættes i Stedet for den bortskaarne Del af Polygonen. Spændingen i et Snorstykke holder derfor Ligevægt med alle de Kræfter, der virke til den ene eller til den anden Side af Snorstykket. Skærer man to Snorstykker over, ser man paa samme Maade, at Spændingerne i disse to Snorstykker og alle de mellemliggende Kræfter holde hinanden i Ligevægt.

I enhver af Polygonens Vinkelspidser virker den der angribende Kraft og to Spændinger; disse tre Kræfter holde hinanden i Ligevægt; man faar saaledes for hver Vinkelspids tre Ligevægtsbetingelser, og disse, i Forbindelse med de Ligninger, der udtrykke, at Polygonens Sider have givne Længder, tjene til Løsning af den almindelige Opgave.

Vi ville betragte nogle Tilfælde, der have særlig Interesse.

86. Kræfterne ere alle givne i Størrelse og Retning. Ligevægtsfiguren søges.

Vi begynde med det yderste Tovstykke til venstre; dets Retning og Spænding er bestemt ved den Kraft, der paavirker dets fri Endepunkt; vi kunne nu bestemme det andet Tovstykkes Retning og Spænding, da denne skal holde Ligevægt med to bekendte Kræfter, nemlig Spændingen i det første Snorstykke og den i Vinkelspidsen virkende Kraft; ved at fortsætte paa samme Maade kunne vi efterhaanden bestemme hele Figuren; den sidst bestemte Spændings Størrelse og Retning maa falde sammen med Størrelsen og Retningen af den givne Kraft, der paavirker Tovets Endepunkt tilhøjre, dersom Ligevægt kan finde Sted.

Dersom de givne Kræfter alle ere parallele, bliver Polygonen plan, thi ved den angivne Konstruktion falder enhver ny Side, der bestemmes, i den ved de forudgaaende Sider og Kræfter bestemte Plan.

87. Dersom Tovets to Endepunkter ere faste, bliver Opgaven mere sammensat, idet man i Stedet for de to bekendte Kræfter, der i det forrige Tilfælde angreb disse Punkter, nu faar Punkternes ubekendte Reaktioner. Man kan imidlertid for det første Punkts Reaktion sætte en ubekendt Kraft med Komposanterne X, Y og Z og der-

paa gaa frem som ovenfor; derved blive alle de Størrelser, man bestemmer, udtrykte ved X, Y og Z; tilsidst bestemmes Tovets andet Endepunkt ogsaa ved disse Størrelser, og da dette Punkts Koordinater ere givne, har man saaledes tre Ligninger med tre ubekendte.

88. Bevægelige Angrebspunkter. Dersom Kræfternes Angrebspunkter kunne forskydes henad Tovet, blive Siderne i Polygonen ubekendte, men de derved tabte Ligninger erstattes ved andre, idet vi have vist (Opg. 13), at enhver af Kræfterne i Ligevægtsstillingen halverer Vinklen mellem de to Polygonsider, i hvis Skæringspunkt Kraften virker. Alle Spændingerne blive lige store, og man har, idet T er Spændingen, P en af Kræfterne og $2v$ den tilsvarende Polygonvinkel:

$$P = 2\,T \cos v.$$

Forresten gælde de for det forrige Tilfælde beviste Sætninger ogsaa her, da en Del af Polygonen ogsaa nu kan betragtes som et fast System, naar de bortskaarne Kræfter erstattes ved Spændingerne i de overskaarne Tovstykker.

Bøjelige Snore.

89. En Snor er fuldkommen bøjelig, naar enhver Kraft, der paavirker den i en Retning, der ikke falder i Tangenten, vil forandre Snorens Form. Lad Elementerne af en saadan ustrækkelig Snor paavirkes af Kræfter, der, ligesom Tyngdekraften, ere proportionale med Massen. Snorens Tæthed og Tværsnit kunne variere fra Punkt til Punkt, men da Tværsnittet tænkes uendelig lille, kan man erstatte et forandret Tværsnit ved en forandret Tæthed og behøver derfor kun at betragte denne. Lad den i Punktet (x, y, z) være ϱ, medens Tværsnittet er konstant.

Lad X, Y, Z være Komposanterne af den Kraft, der vilde angribe den Masse, som findes i en Snorlængde 1 med Tætheden 1, hvis den var samlet i Punktet (x, y, z). Paa Elementet ds virker da en Kraft med Komposanterne:

$$\varrho X ds, \quad \varrho Y ds, \quad \varrho Z ds.$$

Elementet kan betragtes som frit, naar man tilføjer Spændingerne i dets Endepunkter. Lad T være Spændingen i Punktet (x, y, z); da den er rettet efter Tangenten, har den Komposanterne:

$$T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds},$$

der, naar vi give Koordinaterne Tilvæksterne dx, dy, dz, faa Tilvæksterne:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right), \quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right), \quad d\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

Da Spændingerne i Elementets Endepunkter have modsatte Retninger, maa disse Tilvækster og de paa Elementet virkende ydre Kræfter holde hinanden i Ligevægt; Ligevægtsbetingelserne ere derfor:

$$\left.\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + \varrho X ds = 0, \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \varrho Y ds = 0, \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \varrho Z ds = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

der, i Forbindelse med de givne geometriske Betingelser, bestemme Ligevægtsfiguren og Spændingen.

90. En anden Form for Ligevægtsbetingelserne faa vi ved at opløse Kræfterne efter Tangent, Hovednormal og Binormal. Projicere vi paa Tangenten, faa vi for Spændingens Tilvækst dT, idet vi, ved at betragte Spændingerne i de to Endepunkter som faldende begge i den

første Tangent, kun bortkaste forsvindende Led. Projicere vi nu ogsaa den ydre Krafts Komposanter paa Tangenten, faa vi den første Ligevægtsbetingelse:

$$dT + \varrho(X dx + Y dy + Z dz) = 0, \qquad (40)$$

der ogsaa kan udledes ved at multiplicere Ligningerne (39) henholdsvis med $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ og addere, idet man benytter den af:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

ved Differentiation erholdte Ligning:

$$\frac{dx}{ds} d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Projicere vi paa Hovednormalen, faa vi, idet φ er Kontingensvinklen, R Resultanten af X, Y, Z og v dens Vinkel med Tangenten:

$$2\,T \sin\frac{\varphi}{2} + \varrho R \sin v\, ds = 0,$$

hvor

$$2 \sin\frac{\varphi}{2} = \varphi \quad \text{og} \quad ds = r\varphi,$$

idet r er Krumningsradius. Ligevægtsbetingelsen bliver da:

$$\frac{T}{r} + \varrho R \sin v = 0. \qquad (41)$$

Skrives (40) under Formen;

$$dT + \varrho R \cos v\, ds = 0, \qquad (42)$$

faas heraf:

$$\left(\frac{T}{r}\right)^2 + \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 = \varrho^2 R^2, \qquad (43)$$

der ogsaa udledes af Ligningerne (39), naar man flytter deres sidste Led over, kvadrerer og adderer.

Ved Projektion paa Binormalen falde Spændingerne bort, da de ligge i den oskulerende Plan. Den Ligning, vi faa, udtrykker derfor, at R ogsaa maa ligge i Kurvens oskulerende Plan; betegne vi Koefficienterne i den oskulerende Plans Ligning ved A, B, C, bliver Ligningen:

$$AX + BY + CZ = 0, \tag{44}$$

der udledes af (39), naar man eliminerer T og $\frac{dT}{ds}$.

91. Dersom:

$$\varrho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

er det eksakte Differential af en Funktion $\varphi\,(x, y, z)$, faar man af (40):

$$T - T_0 = \varphi\,(x_0, y_0, z_0) - \varphi\,(x, y, z),$$

idet T_0 er Spændingen i (x_0, y_0, z_0). Spændingen bliver konstant, naar:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

det vil sige, naar R er normal paa Kurven. Dette Tilfælde indtræder f. Eks., naar Snoren er lagt over en glat Flade og holdes udstrakt f. Eks. ved Vægte, der ere ophængte i dens Endepunkter; disse Vægte maa da være lige store og angive den konstante Spænding, medens Trykket paa ds bestemmes ved (41):

$$\frac{T\,ds}{r}.$$

Da Snorens oskulerende Plan for hvert Punkt indeholder R, altsaa Fladens Normal, bliver Snoren en geodætisk Kurve paa Fladen.

Kædelinien.

92. Kædelinien er den Kurve, som dannes af en homogen Snor, der kun paavirkes af Tyngdekraften og er ophængt i sine Endepunkter.

Da de virkende Kræfter ere parallele, er Kurven plan, vi tage dens Plan til xy-Pl., Y-Aksen vertikal og positiv opefter. Lad Vægten af en Længdeenhed af Snoren være μ;

da er:

$$X = 0,\quad Y = -\mu,\quad Z = 0,\quad z = 0,$$

hvorved Ligningerne (39) blive:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0;\quad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \mu\,ds;$$

heraf faas ved Integration:

$$T\frac{dx}{ds} = c;\; T\frac{dy}{ds} = \mu\,s + c_1,$$

medens man af Udtrykket for dT (40) faar:

$$T = \mu y + c_2.$$

Spændingens Projektion paa x-Aksen er altsaa konstant. Regne vi x og s ud fra Kurvens laveste Punkt, hvor altsaa $\frac{dx}{ds} = 1$, $\frac{dy}{ds} = 0$, bliver $c_1 = 0$, og c bliver Spændingen i det laveste Punkt. Sætte vi endvidere:

$$c = \mu\,a,$$

og lægge vi Abscisseaksen i Afstanden a under det laveste Punkt, bliver $c_2 = 0$, og Ligningerne ere:

$$T\frac{dx}{ds} = \mu\,a,\quad T\frac{dy}{ds} = \mu\,s,\quad T = \mu\,y, \tag{45}$$

hvoraf

$$y^2 = s^2 + a^2 \tag{46}$$

og $a\dfrac{dy}{dx} = s$ eller $a\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$,

der ved Integration giver:

$$l\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) = \frac{x}{a}$$

eller

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^{\frac{x}{a}},$$

hvor Integrationskonstanten er bestemt ved, at $x = 0$ svarer til $\frac{dy}{dx} = 0$. Af den fundne Ligning udledes ved Divisjon:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{dy}{dx} = e^{-\frac{x}{a}},$$

saa at man faar:

$$2\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}},\ 2\frac{ds}{dx}=e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}},$$

altsaa:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),\ s=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right),\qquad (47)$$

af hvilke den første er Kædeliniens Ligning, medens den anden bestemmer Buelængden.

93. Kædelinien har mange simple geometriske Egenskaber; saaledes viser (46), at Buelængden afhænger paa en simpel Maade af Ordinaten, ligesom den er fundet at være proportional med Tangentens Retningskoefficient. Af andre Egenskaber ville vi nævne den, at Krumningsradius og Normal ere lige store og modsatte, hvilken Sætning let udledes af de fundne Ligninger.

94. Dersom Ophængningspunkterne og Snorens Længde ere givne, kan man bestemme a og derved Kurven. Lad Snorens Længde være l, medens d er Punkternes horizontale, b deres vertikale Afstand; man har da, idet α og α_1 betegne Punkternes Abscisser:

$$b=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{a}}+e^{-\frac{\alpha}{a}}-e^{\frac{\alpha_1}{a}}-e^{-\frac{\alpha_1}{a}}\right),$$

$$l=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{\alpha}{a}}-e^{-\frac{\alpha}{a}}-e^{\frac{\alpha_1}{a}}+e^{-\frac{\alpha_1}{a}}\right);$$

søge vi heraf $l+b$ og $l-b$, faa vi:

$$l^2-b^2=a^2\left(e^{\frac{d}{a}}+e^{-\frac{d}{a}}-2\right)=a^2\left(e^{\frac{d}{2a}}-e^{-\frac{d}{2a}}\right)^2,$$

saa at a bestemmes af den transcendente Ligning:

$$a\left(e^{\frac{d}{2a}}-e^{-\frac{d}{2a}}\right)=\sqrt{l^2-b^2},$$

eller for $d=2a\theta$; $\sqrt{l^2-b^2}=dk$

$$\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2\theta}=k.\qquad (48)$$

Da man maa have $l^2-b^2\geqq d^2$, maa man have $k\geqq 1$. $\theta=0$ giver $k=1$, $a=\infty$. Kurven er i dette Tilfælde en ret Linie. Er Kurven ikke meget afvigende fra en ret Linie, altsaa θ lille, kan man udvikle venstre Side af (48) i Række og benytte de første Led. For større Værdier af k maa man løse Ligningen tilnærmelsesvis ved Forsøg.

Kædebrolinien.

95. Dersom en Bro er ophængt i en Kæde, kan man betragte den Vægt, som en Bue af Kæden bærer, som proportional med Buens horizontale Projektion. Dersom Enheden af Kædelængde bærer Vægten μ, og vi se bort fra Kædens egen Vægt, faa vi Ligningerne:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0;\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\mu\,dx;$$

altsaa: $T\dfrac{dx}{ds}=c,\ T\dfrac{dy}{ds}=\mu x,\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\mu}{c}x,$

idet y-Aksen er lagt gennem det laveste Punkt; heraf faas:

$$y=\frac{\mu}{2c}x^2,$$

idet det laveste Punkt er taget til Begyndelsespunkt. Ligevægtsfiguren er altsaa en Parabel med vertikal Akse. For at bestemme denne Parabel, naar man kender Kædens Længde og Ophængningspunkterne, maa man løse en meget sammensat transcendent Ligning.

Anvendelser.

91. En i to Punkter ophængt Snor paavirkes af Kræfter, der alle gaa gennem et fast Punkt; bevis, at Produktet af Spændingen og dens Afstand fra det faste Punkt er konstant.

92. Find Ligevægtsfiguren for en Snor, der paavirkes af Tyngdekraften, og for hvilken Spændingen staar i et konstant Forhold til Snorens Tæthed.

93. En tung, homogen Snor gaar over en Tridse og bærer i hvert Endepunkt en Vægt V. Bestem Spændingen.

94. Af en Bue af en ophængt, tung Snor kender man Tyngdepunktet, det ene Endepunkt og Tangenten tll det andet Endepunkt. Hvorledes konstrueres Tangenten i det bekendte Endepunkt?

95. En horizontal, cirkulær Cylinder med Vægt V bæres i en elastisk Snor, der er lagt om den og som, naar den ikke strækkes, netop naar om Cylindren. Snoren vilde faa den dobbelte Længde, dersom dens Spænding var 1000 V. Find Spændingen.

96. En tung, homogen Snor er fastgjort i to Punkter i samme Højde, og Spændingen i disse Punkter er lig Snorens Vægt. Bestem Retningen af Tangenterne i disse Punkter og Forholdet mellem Snorens Længde og Ophængningspunkternes Afstand.

97. Hvorledes varierer Tætheden og Spændingen i en tung Snor, naar Ligevægtsfiguren er en Cykloide med lodret Akse?

98. Paa en glat Kugle ligger en tung, elastisk Ring horizontalt. Bestem Ligevægtsstillingen.

99. Hvorledes bestemmes Spændingen i en Snor, naar Kræfterne, der paavirke den, ere rettede mod et fast Punkt og alene afhænge af Afstanden fra dette Punkt?

NIENDE KAPITEL.

Om Gnidning.

96. Vi have hidtil forudsat, at en Overflade ved sin Modstand kun kan tilintetgøre normale Kræfter. Naturlige Legemers Overflader ere imidlertid altid mer eller mindre ru og frembyde derved ogsaa en Hindring mod Bevægelser i tangentiel Retning. Man kan derfor tænke sig Fladen glat, naar man tilføjer en Kraft i Tangentplanen, der er lig og modsat den Kraft, som tilintetgøres ved Gnidningsmodstanden. Denne Kraft har da den Særegenhed, at den kun fremkaldes, naar der er Brug for den til at hindre en tangentiel Bevægelse, og at den, indenfor en vis Grænse, kan antage enhver dertil nødvendig Størrelse og Retning. Denne Grænses Bestemmelse er derfor nødvendig, naar Gnidningsmodstanden kommer i Betragtning ved Bestemmelsen af en Ligevægtsstilling. Af Modstandens Natur følger da tillige, at man ikke faar en bestemt Ligevægtsstilling, men at der er Ligevægt i alle Stillinger indenfor visse Grænser, svarende til de Stillinger, i hvilke Gnidningsmodstanden er saa stor, som den kan være.

Forsøg, der først ere udførte af Coulomb, have lært, at Gnidningsmodstandens Maksimum kun er afhængig af Overfladernes fysiske Beskaffenhed og af det normale Tryk, de udøve paa hinanden. Med dette Tryk er den proportional; er det P, kan Gnidningsmodstanden sættes lig μP, hvor μ, der kaldes Gnidningskoefficienten, er en af Overfladernes Natur afhængig Konstant. Særlig mærkes, at Gnidningsmodstanden er uafhængig af Berøringsfladens Størrelse og, dersom Legemerne ere i Bevægelse, af Hastigheden. Disse Love ere ganske vist ikke absolut gyldige, men her ville vi dog holde os til dem og henvise for den nærmere Undersøgelses Vedkommende til Maskinlæren.

97. Den største Vinkel, som en Kraft, der tilintetgøres af Overfladens Modstand, kan danne med Normalen, kaldes Gnidningsvinklen; er denne v, kan Kraften P opløses i en normal Komposant $P \cos v$ og en tangentiel Komposant $P \sin v$. Den sidste tilintetgøres af Gnidningsmodstanden, medens den første er det normale Tryk; man har derfor:

$$\mu P \cos v = P \sin v \quad \text{eller} \quad \mu = \operatorname{tg} v,$$

der viser, at Gnidningsvinklen kun er afhængig af Gnidningskoefficienten og at Grænsestillingerne for de Kræfter, som tilintetgøres af Fladen, danne en Omdrejningskegleflade om Normalen som Akse. Dersom et Legeme, der hviler paa en Skraaplan, er paa Nippet til at glide, er Skraaplanens Heldning netop lig Gnidningsvinklen, idet Planens hele Reaktion maa være lig og modsat Vægten. Dette giver et simpelt Middel til den praktiske Bestemmelse af Gnidningskoefficienten.

Ofte er det umiddelbart indlysende, med hvilken Retning Bevægelsen vilde begynde, dersom den ikke hindredes ved Gnidningsmodstanden, og man kender da dennes Retning; i Almindelighed er dog ogsaa Retningen ubekendt. Ogsaa Kurver kunne tænkes at være ru. Man ser let, at Gnidningskeglens Akse her falder sammen med Kurvens Tangent og at dens halve Toppunktsvinkel er Komplement til Gnidningsvinklen. Retningerne af de Kræfter, der kunne tilintetgøres, falde ikke her, som ovenfor, indeni Keglen, men udenfor den.

Naar der i de følgende Anvendelser tales om Ligevægtsstillingen, menes Grænsestillingen. Gnidningskoefficienten antages overalt bekendt.

Anvendelser.

100. En tung Partikel hviler paa en ru Kugle; find Ligevægtsstillingen.

101. En materiel Vægtstang kan dreje sig om en Akse, der er lidt mindre end Hullet, som den gaar igennem. Den angribes af to Kræfter i en paa Aksen vinkelret Plan. Find Ligevægtsstillingen.

Betragtes et Snit gennem de to Kræfter, maa disses Resultant gaa gennem de to Cirklers Røringspunkt og danne Gnidningsvinklen med deres fælles Normal. Derved bestemmes de to Grænser for Ligevægtsstillingerne.

102. En homogen, cirkulær Cylinder staar paa en horizontal Plan. Et Kraftpar søger at dreje Cylindren om dens Akse; hvor stort er dets Moment, naar en lille Forøgelse vilde fremkalde Bevægelse? Trykket forudsættes jævnt fordelt paa Understøtningsfladen.

Er Tætheden ϱ, bliver Trykket paa et Element (polære Koordinater) $\varrho g h r dr d\theta$, hvor h er Cylindrens Højde. Gnidningsmodstanden er vinkelret paa Radius og har med Hensyn til Aksen Momentet $\mu \varrho g h r^2 dr d\theta$, der, naar Integrationen udføres med Hensyn til θ, giver Momentet $2\pi\mu\varrho g h r^2 dr$. Det søgte Moment er derfor, idet a er Cylindrens Radius:

$$2\pi\mu\varrho g h\int_0^a r^2 dr = \tfrac{2}{3}\mu a V,$$

hvor V er Cylindrens Vægt.

103. En homogen Stang med Længde $2l$ og Vægt V støtter sig med sit ene Endepunkt A til en horizontal, med det andet B til en vertikal Plan. Gnidningskoefficienterne ere μ og μ_1. Find Ligevægtsstillingen.

Lad X og Y være Trykkene i B og A, v Stangens Vinkel med den horizontale Plan; man faar da ved Projektion:

$$V = Y + \mu_1 X;\ X = \mu Y,$$

og ved at tage Momenterne med Hensyn til A,

$$2lX\sin v + 2l\mu_1 X\cos v = lV\cos v,$$

hvorved X, Y og v bestemmes.

104. En homogen Cylinder staar paa en Skraaplan, hvis Heldning stadig forøges. Bestem Forholdet mellem Radius og Højde, naar Cylindren samtidig begynder at vælte og at glide.

105. Find Størrelse og Retning af den mindste Kraft, ved hvilken en Vægt V kan bevæges opad en Skraaplan med Heldning v.

106. To Vægte, V og V_1, ere i Ligevægt paa en Skraaplan, idet de ere forbundne ved en med Skraaplanen parallel Snor. Gnidningskoefficienterne ere μ og μ_1. Find Skraaplanens Heldning.

107. To ens, retvinklede Parallelepipeder hvile hver med en Kant paa en ru vandret Plan, medens det ene hviler med en Sideflade paa en Sideflade af det andet. Find Ligevægtsstillingen. Sidefladerne ere glatte.

X 108. En Snor er lagt om en ru Cylinder, saa at den danner en Vindellinie. Find Maksimum af Stigning for denne.

109. En Vogn er i Ligevægt paa en Skraaplan paa Grund af Gnidningen mellem Hjul og Aksler. Find Skraaplanens Heldning. Hjulene bærer ligemeget, og deres egen Vægt lades ude af Betragtning.

110. To lige store cirkulære Cylindre ligge paa en horizontal Plan, saa at de røre hinanden langs en Frembringer. De bære en tredje lignende Cylinder, der rører dem langs Frembringere. Bestem Gnidningskoefficienterne for Cylinder og Cylinder og for Cylinder og Plan, naar der netop er Ligevægt.

111. En Lem, der er løftet lidt, hviler paa Kanten af en anden lignende Lem. Kan man løfte den sidste (og derved tillige den første)? Gnidningen i Hængslerne tages ikke i Betragtning.

TIENDE KAPITEL.

De virtuelle Hastigheders Princip.

98. Tænke vi os Angrebspunktet for en Kraft P forskudt et Stykke m i en Retning, der med Kraftens Retning danner en Vinkel α, forstaa vi ved Kraftens virtuelle Moment Produktet:

$$Pm\cos\alpha$$

eller Produktet af Kraften og Forskydningens Projektion paa Kraftens Retning.

Dersom Punktet er frit og angribes af flere Kræfter, have vi fundet, at i Ligevægtsstillingen er:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0\,,$$

hvor Vinklerne α ere Kræfternes Vinkler med en hvilken som helst Retning. Multiplicere vi denne Ligning med m, kunne vi udtrykke Sætningen saaledes:

Naar et frit Punkt er i Ligevægt, er Summen af Kræfternes virtuelle Momenter Nul for en hvilken som helst Forskydning.

Der er altsaa ingen væsentlig Forskel paa at forskyde Punktet Stykket m i en vis Retning og at projicere Kræfterne paa denne Retning. I begge Tilfælde dannes Ligninger, der, paa Faktoren m nær, ere identiske, og i begge Tilfælde kan man kun danne tre af hverandre uafhængige Ligninger; omvendt give tre saadanne Ligninger de tilstrækkelige Ligevægtsbetingelser.

Er der ikke Ligevægt, kunne vi tilvejebringe Ligevægt ved at tilføje en Kraft, lig og modsat Resultanten; da nu Ligevægtsbetingelserne ere opfyldte, har man, at:

Resultantens virtuelle Moment er lig Summen af Komposanternes virtuelle Momenter for enhver Forskydning.

Da Størrelsen af m er vilkaarlig, kunne vi gøre m uendelig lille; vi kunne da, idet vi lægge et retvinklet Koordinatsystem, give Angrebspunktet (x, y, z) en vilkaarlig Forskydning ved at give Koordinaterne Tilvæksterne δx, δy og δz. Erstatte vi nu de virkende Kræfter ved tre Kræfter X, Y, Z, der virke efter Akserne, blive disses virtuelle Momenter henholdsvis $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$, saa at man for Ligevægt faar:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0\,, \tag{49}$$

der ikke alene er en nødvendig, men ogsaa en tilstrækkelig Ligevægtsbetingelse, thi da Forskydningen er ganske vilkaarlig, ere δx, δy og δz uafhængige af hverandre, og Ligningen kan derfor kun tilfredsstilles ved:

$$X = 0\,;\quad Y = 0\,;\quad Z = 0.$$

99. Dersom Punktet er bundet til en glat Flade eller Kurve, kan man borttage disse, naar man tilføjer deres Reaktioner. Den ovenstaaende Ligning vedbliver da at være nødvendig og tilstrækkelig Ligevægtsbetingelse, men indeholder de ubekendte Tryk. Dersom man imidlertid kun foretager Forskydninger i Fladen eller Kurven, altsaa normalt paa de ubekendte Tryk, ere disses virtuelle Momenter Nul, og Ligningen er befriet for dem. Nu kan imidlertid, dersom Punktet forskydes i en given Flade, en af Forskydningerne δx, δy, δz udtrykkes lineært ved de to andre, og (49) deler sig derfor kun i to Ligninger; dersom Punktet forskydes paa en given Kurve, kunne de to Forskydninger bortskaffes, og man faar kun een Ligning; da man imidlertid i det første Tilfælde har Fladens Ligning og i det andet Kurvens to Ligninger, har man i alle Tilfælde de tre nødvendige Ligninger. Altsaa: For et bundet Punkt giver de virtuelle Hastigheders Princip den nødvendige og tilstrækkelige Ligevægtsbetingelse, naar man foretager en vilkaarlig lille Forskydning i den Flade eller Kurve, til hvilken Punktet er bundet. Ønsker man tillige Trykket bestemt, maa man give Punktet en Forskydning bort fra Fladen eller Kurven.

Metoden falder endnu ganske sammen med den, vi tidligere anvendte. Den vilkaarlige Forskydning i Fladen svarer til Kræfternes Projektion paa to Linier i Tangentplanen, Forskydningen i Kurven til Projektion paa Kurvens Tangent, og vi have tidligere vist, at disse Projektioner give de til Problemets Løsning nødvendige Ligninger, naar Trykkene ikke ønskes bestemte.

100. Lad os nu betragte et System af Punkter, der paavirkes af Kræfter, og som bevæge sig frit eller paa glatte Flader eller Kurver, og som ere forbundne med Snore, Stænger, eller lignende. Vi kunne da borttage disse Forbindelser, naar vi indføre deres Spændinger, og vi faa da, ved at anvende de virtuelle Hastigheders Princip paa hvert Punkt for sig, de nødvendige og tilstrækkelige Ligevægtsbetingelser. I disse indgaa imidlertid de ubekendte Spændinger, og enhver af disse findes to Gange med samme Størrelse og med modsat Retning, eftersom vi betragte Stangens ene eller andet Endepunkt. Vi have endnu ingen Afhængighed mellem Størrelserne af de Forskydninger, vi give de forskellige Punkter, og vi ville derfor undersøge, om vi ikke her kunne vælge en saadan

Afhængighed, at vi derved blive fri for at indføre de ubekendte Spændinger i Ligningerne.

Lad nu den Stang eller Snor, der forbinder Punkterne (x, y, z) og (x_1, y_1, z_1), have Længden l og med Akserne danne Vinklerne α, β, γ, og lad begge Endepunkter angribes af en Kraft T, der virker langs Stangen, men med modsatte Retninger for de to Punkter. Forskyde vi Stangen, saa at Endepunkternes Koordinater faa Tilvæksterne δx, δy, δz og δx_1, δy_1, δz_1, bliver Summen af de to Kræfters virtuelle Momenter:

$$T\cos\alpha\,(\delta x - \delta x_1) + T\cos\beta\,(\delta y - \delta y_1) + T\cos\gamma\,(\delta z - \delta z_1)$$

$$= T\frac{x-x_1}{l}(\delta x - \delta x_1) + T\frac{y-y_1}{l}(\delta y - \delta y_1) + T\frac{z-z_1}{l}(\delta z - \delta z_1),$$

men: $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = l^2$,

hvoraf:

$$(x-x_1)(\delta x - \delta x_1) + (y-y_1)(\delta y - \delta y_1) + (z-z_1)(\delta z - \delta z_1) = l\delta l,$$

idet vi tage den Mulighed, at Snoren eller Stangen er elastisk, med i Betragtning. Vi faa altsaa for Summen af de virtuelle Momenter:

$$T\delta l,$$

der er Nul, dersom Stangen beholder sin Længde.

Heraf følger, at dersom vi paa den ovenfor angivne Maade danne Ligninger ved Forskydninger af de enkelte Punkter, ville de i disse Ligninger indgaaende Spændinger elimineres ved Ligningernes Addition, dersom vi lade de enkelte Punkters Forskydninger afhænge saaledes af hinanden, at Længderne af de Stænger eller Snore, langs hvilke Spændingerne virke, blive uforandrede. Dette kan altid opnaas for de uelastiske Stængers Vedkommende, da Systemet ellers var ubevægeligt; derimod kan det træffe sig, at elastiske Snore eller Stænger maa forandres i Længde, naar Bevægelsen skal opfylde de andre Betingelser, og i saa Fald faar Ligningen Led af Formen $T\delta l$. De virtuelle Hastigheders Princip leverer imidlertid ogsaa i dette Tilfælde de tilstrækkelige Ligevægtsbetingelser, da Spændingen i en elastisk Snor er en bekendt Funktion af Snorens Længde, saa at de tilkomne Led ikke tilføje ny ubekendte.

101. Vi have endnu tilbage at betragte een Forbindelse, idet Systemet kan indeholde glatte Legemer, der berøre hinanden. I Røringspunktet har man da to lige store og modsatte Tryk; Summen af disses virtuelle Momenter er Nul, naar Fladerne glide eller rulle lidt paa hinanden, thi Projektionen af Angrebspunktets Forskydning paa Kraftens Retning er uendelig lille af højere end første Orden. Trykkene i Røringspunkterne gaa derfor bort af den Ligning, der dannes ved en saadan virtuel Forskydning, ved hvilken Fladerne vedblive at røre hinanden.

Vi kunne nu opstille den almindelige, under Navn af de virtuelle Hastigheders Princip bekendte Sætning:

Naar et System er i Ligevægt, er Summen af de virkende Kræfters virtuelle Momenter Nul for enhver Forskydning, der stemmer med de givne geometriske Betingelser, og omvendt. Til de virkende Kræfter maa da regnes Spændinger i elastiske Stænger eller Snore som ovenfor vist.

Dersom de geometriske Betingelser ere givne ved Ligninger mellem Angrebspunkternes Koordinater x, y, z, x_1, y_1, z_1, . . ., giver enhver saadan Ligning, $u = 0$, en Relation mellem Forskydningerne af Formen:

$$\frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z + \frac{du}{dx_1}\delta x_1 + \frac{du}{dy_1}\delta y_1 + \ldots = 0.$$

Enhver saadan Ligning tjener da til Elimination af en af Forskydningerne; derved formindskes Antallet af Ligninger, der dannes ved de virtuelle Hastigheders Princip, med 1, men denne Ligning erstattes ved $u = 0$, og Antallet af Ligninger vedbliver at være lig Antallet af ubekendte.

102. De virtuelle Hastigheders Princip antager en særlig simpel Form, naar der ikke virker andre Kræfter end Tyngdekraften. Er V_k Vægten af et vilkaarligt af de bevægelige Legemer og (x_k, y_k, z_k) dets Tyngdepunkt (z vertikal), giver de virtuelle Hastigheders Princip:

$$\Sigma V_k \delta z_k = 0,$$

men:

$$\Sigma V_k z_k = \zeta \Sigma V_k,$$

hvor ζ er z-Koordinaten til det hele bevægelige Systems Tyngdepunkt; heraf følger:

$$\Sigma V_k \delta z_k = \delta\zeta \Sigma V_k,$$

altsaa:

$$\delta\zeta = 0,$$

der viser, at af de mulige Stillinger, som Systemets Tyngdepunkt kan indtage, vil det i Ligevægtsstillingerne indtage en Maximums eller Minimumsstilling.

103. Den ovenstaaende Udvikling gælder kun for glatte Legemer, thi er der Gnidningsmodstand, vil en Forskydning i Tangentplanen vel bortskaffe den normale Reaktion, men ikke den deraf uafhængige Gnidningsmodstand. Man kan imidlertid vælge en saadan Forskydning, at baade Trykket og Gnidningsmodstanden gaa bort, idet man kan forskyde i en Retning, vinkelret paa disse to Kræfters Resultant, det vil sige i en Retning, der med Tangentplanen danner Gnidningsvinklen. Med denne Ændring vedbliver de virtuelle Hastigheders Princip at gælde.

Som Eksempel ville vi betragte en Stang AB, der støtter sig til en vandret og en lodret Linie, og som har Længden $2l$ og Vægten V. Gnidningskoefficienterne i A og B ere henholdsvis μ og μ_1.

Vi vælge de to Linier til Koordinatakser. Da A og B ved Forskydningen forlade disse Linier, betegnes de (x, y) og (x_1, y_1). Man faar da ved en Forskydning:

$$\delta y = \mu \delta x; \quad \delta x_1 = -\mu_1 \delta y_1,$$

men af:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 4l^2$$

faar man:

$$(x - x_1)(\delta x - \delta x_1) + (y - y_1)(\delta y - \delta y_1) = 0,$$

saa at:

$$\operatorname{tg} v = \frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{\delta x - \delta x_1}{\delta y - \delta y_1},$$

hvor v er Stangens Vinkel med x-Aksen; nu giver de virtuelle Hastigheders Princip:

$$V(\delta y + \delta y_1) = 0,$$

og man faar da:

$$\operatorname{tg} v = \frac{1 - \mu\mu_1}{2\mu},$$

der bestemmer Ligevægtsstillingen.

Anvendelser.

112. To elastiske Snore ere udspændte som Diagonaler i et Parallelogram, der har Hængsler i Vinkelspidserne. Find Forholdet mellem de to Spændinger.

Ere Diagonalerne l og l_1, Spændingerne T og T_1, faar man ved en lille Bevægelse, der giver Diagonalernes Længder Tilvæksterne dl og dl_1:

$$Tdl + T_1 dl_1 = 0.$$

Ere Siderne a og b, har man:

$$l^2 + l_1{}^2 = 2a^2 + 2b^2, \text{ altsaa } l dl + l_1 dl_1 = 0.$$

Spændingerne forholde sig derfor som Længderne af Snorene.

113. En Linie med Vægt V støtter sig til en vandret og en lodret Linie og holdes i Ligevægt ved en Snor med Længden l, der gaar fra de faste Liniers Skæringspunkt til et saadant Punkt af den bevægelige Linie, at dennes øverste Stykke er a, det nederste b. Find Spændingen og Trykkene.

Lader man Linien $a + b$ glide lidt paa de to faste Linier, faar man:

$$Tdl + Vdy = 0,$$

hvor T er Spændingen, y Højden af Liniens Midtpunkt. Ad geometrisk Vej udledes nu let en Ligning mellem l, y og konstante Størrelser. Ved Differentiation af denne Ligning bestemmes Forholdet mellem dy og dl. Paa lignende Maade faar man Trykket i Stangens ene Endepunkt bestemt ved en lille Bevægelse, ved hvilken l ikke forandres, medens Stangens andet Endepunkt glider paa den Linie, til hvilken det støtter sig.

114. To Stænger med Længden l, AB og BC, ere forbundne ved et Hængsel i B. A ligger i et fast Punkt, medens C kan glide paa en lodret Linie. Find Ligevægtsstillingen.

Ere y og y_1 Højderne af Stængernes Midtpunkter, faar man:

$$dy + dy_1 = 0.$$

Lad v og v_1 være Stængernes Vinkler med en vandret Linie; da er:

$$y = \tfrac{1}{2} l \sin v; \quad y_1 = l \sin v + \tfrac{1}{2} l \sin v_1,$$

saa at Ligevægtsstillingen bestemmes ved:

$$3 \cos v\, dv + \cos v_1\, dv_1 = 0.$$

Er A's Afstand fra den lodrette Linie a, bliver endvidere

$l\cos v_1 + l\cos v_2 = a$

115. En homogen Kegle kan bevæge sig i den omskrevne Kugle; find Betingelsen for, at der er Ligevægt i alle Stillinger.

Keglens Tyngdepunkt maa under Bevægelsen have konstant Højde, og da dets Afstand fra Centrum er konstant, maa det falde i Centrum. Derved bestemmes let Toppunktsvinklen.

116. En homogen Stang gaar gennem en lille Ring og støtter sig til en lodret Plan. Bestem Ligevægtsstillingen og Trykkene. $\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$ Stang $2l$, Rings Afstand a

117. To Partikler med samme Vægt ere bundne til en Ellipse, hvis store Akse er lodret; de ere forbundne ved en Snor, der gaar over en lille Tridse i det øverste Brændpunkt. Bevis, at der er Ligevægt i enhver Stilling.

118. En Stang støtter sig med sit nederste Endepunkt til en lodret Plan; det øverste bærer en Vægt, og Midtpunktet er ved en Snor forbundet med et fast Punkt; bestem Ligevægtsstilling, Tryk og Spænding.

119. Et Punkt, der er bundet til en Ellipse, tiltrækkes af Brændpunkterne. Tiltrækningen er omvendt proportional med Afstandens Kvadrat; find Ligevægtsstillingen.

120. En Stang hviler paa en Kurve i en lodret Plan og støtter sit nederste Endepunkt til en lodret Linie. Bestem Kurven, naar der skal være Ligevægt, i hvilket Punkt end Stangen rører den.

121. Et Punkt tiltrækkes af to Punkter A og B med en Kraft, der er proportional med Afstanden. Punktet er ved en Stang forbundet med Midtpunktet af AB, om hvilket Punkt Stangen kan dreje sig. Bestem Ligevægtsstillingen.

122. En tung Partikel ligger paa en Kurve i en vertikal Plan og er ved en elastisk Snor, der ligger paa Kurven, forbundet med et fast Punkt af denne. Bestem Kurven saaledes, at der er Ligevægt i alle Stillinger.

123. Løs Opgaverne 61—66 ved Hjælp af de virtuelle Hastigheders Princip.

ELLEVTE KAPITEL.

Om Tiltrækning.

104. Erfaringen lærer, at alle Legemer tiltrække hinanden, og at Tiltrækningen er proportional med Masserne, men omvendt proportional med Afstandens Kvadrat. Betegner μ Tiltrækningen mellem to Partikler med Masserne 1, og hvis Afstand er 1, bliver derfor Tiltrækningen mellem to Partikler med Masserne dm og dm_1 og Afstanden r:

$$\mu \frac{dm\, dm_1}{r^2}.$$

Mere almindeligt kan man tænke sig en Tiltrækning:

$$\mu\, \varphi(r)\, dm\, dm_1,$$

hvor $\varphi(r)$ er en vilkaarlig Funktion af Afstanden. $\varphi(r)$ kaldes Tiltrækningsloven. Herunder kan ogsaa Frastødning være indbefattet.

105. Tiltrækning af en tynd, homogen, prismatisk Stang. Lad den tiltrukne Partikel P have Massen 1, medens Enhed af Stangens Længde har Massen m. Tiltrækningen af et Element dx af Stangen er da $\mu m \varphi(r) dx$. Vi lægge Abscisseaksen paa Stangen og Ordinataksen gennem P, hvis Afstand fra Stangen kaldes β. Komposanterne af Tiltrækningen ere da:

$$X = \mu m \int \frac{x}{r} \varphi(r) dx; \quad Y = -\mu m \int \frac{\beta}{r} \varphi(r) dx,$$

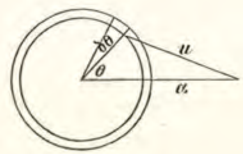
hvor: $\quad x^2 + \beta^2 = r^2$, altsaa $x\,dx = r\,dr$,

og Integrationen udstrækkes til hele Stangens Længde. Fortegnene ere bestemte ved Retningerne af den elementære Tiltræknings Komposanter. Vi mærke os for det følgendes Skyld særlig den første Komposant:

$$X = \mu m \int \varphi(r) dr = \mu m (\psi(r_1) - \psi(r_2)),$$

hvor ψ er den Funktion, hvis Afledede er φ, og hvor r_1 og r_2 ere Partiklens Afstande fra Stangens Endepunkter. Vi se heraf, at naar Stangen og Tiltrækningsloven ere givne, er *Tiltrækningens Komposant i Stangens Retning alene afhængig af Partiklens Afstande fra Stangens Endepunkter.*

106. Den naturlige Tiltrækning af en homogen Kugleskal. En Kugleskal, begrænset af to koncentriske Kuglelader med Radierne r og $r + dr$, har Tætheden ϱ. En tiltrukken Partikel med Massen 1 har Afstanden a fra Centrum. To Radier i det i Figuren fremstillede Snit danne med a Vinklerne θ og $\theta + d\theta$. Disse og de to Cirkler begrænse et Element med Arealet $r\,dr\,d\theta$, der ved Drejning om a beskriver en Ring med Massen $\varrho \,.\, 2\pi r \sin\theta \,.\, r\,dr\,d\theta$.



Denne Rings Elementers Tiltrækninger danne alle med a en Vinkel, hvis cos. er $\dfrac{a^2 + u^2 - r^2}{2ua}$, og hele Ringen udøver derfor en Tiltrækning efter a, der er:

$$\pi \varrho \mu r^2 dr \frac{u^2 + a^2 - r^2}{a u^3} \sin\theta\, d\theta,$$

eller, da:

$$u^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta, \quad \text{altsaa} \quad u\,du = ar\sin\theta\, d\theta,$$

$$\frac{\pi \varrho \mu r\, dr}{a^2} \cdot \frac{u^2 + a^2 - r^2}{u^2}\, du.$$

Den samlede Tiltrækning, der aabenbart er rettet mod Centrum, er derfor:

$$\frac{\pi \varrho \mu r\, dr}{a^2} \int 1 + \left(\frac{a^2 - r^2}{u^2}\right) du,$$

hvor Integralet skal tages mellem Grænserne $r - a$ og $r + a$, dersom Partiklen ligger indenfor, men mellem $a - r$ og $a + r$, dersom Partiklen ligger udenfor Kugleskallen. I det første Tilfælde faar Integralet Værdien Nul, i det andet Værdien $4r$. Da nu $4\pi \varrho r^2 dr$ er hele Kugleskallens Masse, bliver, dersom denne betegnes med m, Tiltrækningen i det sidste Tilfælde:

$$\frac{\mu m}{a^2},$$

altsaa den samme, som om hele Kugleskallens Masse var samlet i Centrum.

Har Kugleskallen en endelig Tykkelse, og er dens Tæthed kun afhængig af Afstanden fra Centrum, kan den deles i uendelig tynde, homogene Kugleskaller, og paa disse kunne de fundne Resultater anvendes. Man faar derved følgende Sætninger:

En Partikel er i Ligevægt overalt indeni en af homogene, koncentriske Lag bestaaende hul Kugle; befinder Partiklen sig udenfor Kuglen, tiltrækkes den, som om hele den tiltrækkende Masse var samlet i Centrum; befinder den sig i den hule Kugles Masse, tiltrækkes den, som om den nærmere Centrum liggende Masse var samlet i Centrum.

Ligger Partiklen indenfor Overfladen af en fuld, homogen Kugle i en Afstand a fra Centrum, er Tiltrækningen:

$$\tfrac{4}{3} \pi \mu \varrho a^3 : a^2,$$

altsaa proportional med Afstanden fra Centrum.

107. Den beviste Sætning for det Tilfælde, hvor Partiklen ligger indenfor Kugleskallen, er et specielt Tilfælde af en mere almindelig Sætning, der kan udtrykkes saaledes:

To Masser med samme Tæthed udøve samme Tiltrækning paa en Partikel, naar de afskære lige store Stykker (til samme Side) af enhver Linie gennem Partiklen.

Lægger man nemlig en Keglefiade med Toppunkt i Partiklen og uendelig lille Toppunktsvinkel, og deler man de derved af Masserne udskaarne Dele i uendelig mange afstumpede Kegler med samme Højde, ville Masserne af to saadanne forholde sig som Kvadraterne af deres Afstande fra Partiklen, og de ville derfor udøve samme Tiltrækning paa denne, hvilket da ogsaa maa gælde om de to hele Masser. En Partikel vil ifølge denne Sætning være i Ligevægt, dersom den tiltrækkende, homogene Masse af enhver Linie gennem Partiklen afskærer lige store Stykker, beliggende paa modsatte Sider af Partiklen. Ifølge en bekendt, geometrisk Sætning følger heraf:

En Partikel er i Ligevægt overalt indenfor en homogen Skal, der begrænses af to ligedannede og ligedan beliggende Ellipsoider.

108. Tiltrækningen af en homogen Ellipsoide. Dersom Partiklen ligger indenfor Ellipsoidens Overflade, lægger man igennem Partiklen en med den givne ligedannet og ligedan beliggende Ellipsoide; den derved afskaarne Skal udøver ingen Tiltrækning, og Opgaven er altsaa reduceret til det Tilfælde, hvor Partiklen ligger paa Ellipsoidens Overflade. Ligger Partiklen udenfor Ellipsoiden, kan, som det er vist af Maclaurin og Ivory, Opgaven reduceres til det ovenfor nævnte Tilfælde. Beviset herfor støtter sig paa følgende Sætning:

Dersom man har to konfokale Ellipsoider:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{og} \quad \frac{x^2}{a_1^{\,2}}+\frac{y^2}{b_1^{\,2}}+\frac{z^2}{c_1^{\,2}}=1,$$

hvor altsaa:

$$a_1^{\,2}-a^2=b_1^{\,2}-b^2=c_1^{\,2}-c^2=k^2,$$

og man ved parrede Punkter paa de to Overflader forstaar saadanne, hvis Koordinater ere proportionale med de tilsvarende Halvakser, er Afstanden mellem et Punkt af den ene og et Punkt af den anden Flade lig Afstanden mellem de to med disse parrede Punkter.

Man har nemlig, idet d og d_1 ere de to Afstande, (x, y, z) og (ξ_1, η_1, ζ_1) de to første Punkter, (x_1, y_1, z_1) og (ξ, η, ζ) de dermed parrede Punkter;

$$d^2=(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2+(z-\zeta_1)^2;$$

$$d_1^{\,2}=(x_1-\xi)^2+(y_1-\eta)^2+(z_1-\zeta)^2,$$

men $x:x_1=\xi:\xi_1=a:a_1$ o. s. v. altsaa $x\xi_1=x_1\xi$ o. s. v. hvoraf:

$$d^2-d_1^{\,2}=x^2-x_1^{\,2}+\xi_1^{\,2}-\xi^2+y^2-y_1^{\,2}+\eta_1^{\,2}-\eta^2+z^2-z_1^{\,2}+\zeta_1^{\,2}-\zeta^2$$

$$=x^2\left(1-\frac{a_1^{\,2}}{a^2}\right)+\xi_1^{\,2}\left(1-\frac{a^2}{a_1^{\,2}}\right)+y^2\left(1-\frac{b_1^{\,2}}{b^2}\right)$$

$$+\eta_1^{\,2}\left(1-\frac{b^2}{b_1^{\,2}}\right)+z^2\left(1-\frac{c_1^{\,2}}{c^2}\right)+\zeta_1^{\,2}\left(1-\frac{c^2}{c_1^{\,2}}\right)$$

$$=k^2\left(\frac{\xi_1^{\,2}}{a_1^{\,2}}+\frac{\eta_1^{\,2}}{b_1^{\,2}}+\frac{\zeta_1^{\,2}}{c_1^{\,2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)=0.$$

Lad nu de to Ellipsoider begrænse Masser med Tætheden ϱ; den første tiltrækker en udenfor den paa den anden Overflade liggende Partikel P, den anden en Partikel i det med P parrede Punkt P_1. Af den første udskæres et Prisme $A_1\,B_1$ parallelt med x-Aksen og med Tværsnittet $dy\,dz$. Dertil svarer i den anden et Prisme AB med Tværsnittet $\frac{b_1 c_1}{b c}\,dy\,dz$. Da $PA_1=P_1\,A$ og $PB_1=P_1\,B$, vilde, ifølge en ovenfor bevist Sætning (105), Komposanten efter x-Aksen af Tiltrækningen af $A_1\,B_1$ til P være lig Komposanten af Tiltrækningen af AB til P_1, dersom Prismerne havde samme Tværsnit. Disse Komposanter forholde sig derfor som $b_1\,c_1:bc$, og da dette gælder for hvert enkelt Par sammenhørende Prismer, gælder det ogsaa for de to Ellipsoider. Den Opgave, at bestemme Komposanten efter x-Aksen af Tiltrækningen af den første Ellipsoide til det udvendige Punkt P, er derved reduceret til den, at bestemme den samme Komposant af den anden Ellipsoides Tiltrækning til det i Massen liggende Punkt P_1. Af den ene Komposant faas de andre ved en passende Ombytning af Bogstaver.

109. Vi have saaledes kun tilbage at beregne Tiltrækningen af en homogen Ellipsoide:

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

til et Punkt af dens Overflade. Lad dette Punkt være (x_1, y_1, z_1). Vi tage dette Punkt til Pol for polære Koordinater, idet vi sætte:

$$x=x_1+r\cos\theta;\; y=y_1+r\sin\theta\cos\psi;\; z=z_1+r\sin\theta\sin\psi.$$

Volumenelementet er $r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\psi$, hvis Tiltrækning er $\mu\varrho\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\psi$, der, naar Integrationen med Hensyn til r udføres, giver: $\mu\,\varrho\,r\sin\theta\,d\theta\,d\psi$,

hvor r er den af Linien (θ, ψ) afskaarne Korde; dennes Længde findes ved at indsætte de ovenfor angivne Udtryk for x, y og z i Ellipsoidens Ligning at være:

$$-2\,\frac{Ax_1\cos\theta+By_1\sin\theta\cos\psi+Cz_1\sin\theta\sin\psi}{A\cos^2\theta+B\sin^2\theta\cos^2\psi+C\sin^2\theta\sin^2\psi}.$$

For at finde den samlede Tiltræknings Komposant X efter x-Aksen, skulle vi multiplicere det fundne Element af Tiltrækningen med $\cos\theta$ og integrere; vi kunne her for θ

vælge Grænserne 0 og π, for ψ Grænserne 0 og 2π, men faa derved hvert Element med to Gange. Udtrykket for r viser, at Resultatet har Formen:

$$kx_1 + ly_1 + mz_1,$$

hvor k, l og m ere Konstanter. Da man nu, paa Grund af Symmetrien, for $x_1 = 0$ skal have $X = 0$, maa l og m være Nul. De Led, der indeholde y_1 og z_1, kunne derfor udelades, og man faar;

$$X = -\mu\varrho x_1 A \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{(A\cos^2\theta + B\sin^2\theta)\cos^2\psi + (A\cos^2\theta + C\sin^2\theta)\sin^2\psi},$$

hvor Nævneren er ændret ved, at dens første Led er multipliceret med $\sin^2\psi + \cos^2\psi$. Integrationen med Hensyn til ψ kan udføres, idet man i Stedet for at tage Integralet fra 0 til 2π tager fire Gange Integralet fra 0 til $\frac{\pi}{2}$ og benytter Formlen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{a\cos^2\psi + \beta\sin^2\psi} = \frac{\pi}{2\sqrt{a\beta}};$$

man faar derved:

$$X = -2\mu\varrho x_1 A \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(A\cos^2\theta + B\sin^2\theta)(A\cos^2\theta + C\sin^2\theta)}}.$$

Da $\sin\theta\, d\theta = -d\cos\theta$, kan man tage to Gange Integralet fra 0 til $\frac{\pi}{2}$; sætter man dernæst:

$$\cos\theta = u,\ A - B = aB,\ A - C = \beta C,$$

faar man, idet M er Ellipsoidens Masse:

$$X = -3\mu M A^{\frac{3}{2}} x_1 \int_0^1 \frac{u^2\, du}{\sqrt{(1 + au^2)(1 + \beta u^2)}},$$

hvoraf de to andre Komposanter let dannes.

$$Y = -2\mu\varrho y_1 B \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(B\cos^2\theta + A\sin^2\theta)(B\cos^2\theta + C\sin^2\theta)}}$$

Er Ellipsoiden en Omdrejningsellipsoide, idet f. Eks. $B = C$, komme alle Komposanterne til at afhænge af et Integral af Formen: ?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{a\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta},$$

hvor Integrationen let udføres.

110. Potentialet. Lad $\varphi(r)$ være Tiltrækningsloven og ψ den Funktion, hvis afledede er φ. Dannes Integralet

$$U = \int \psi(r)\, dm,$$

hvor: $r^2 = (x - a)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$

og Integrationen udstrækkes til hele det tiltrækkende Legeme, har man:

$$\frac{\delta U}{\delta a} = -\int \varphi(r) \frac{x - a}{r}\, dm;\quad \frac{\delta U}{\delta \beta} = -\int \varphi(r) \frac{y - \beta}{r}\, dm;$$

$$\frac{\delta U}{\delta \gamma} = -\int \varphi(r) \frac{z - \gamma}{r}\, dm;$$

altsaa:

$$X = -\mu \frac{\delta U}{\delta a};\quad Y = -\mu \frac{dU}{\delta \beta};\quad Z = -\mu \frac{\delta U}{\delta \gamma}.$$

Tiltrækningens Komposanter bestemmes saaledes ved Differentiation af et og samme Integral. Er Tiltrækningen den naturlige, sætter man:

$$V = \int \frac{dm}{r};$$

V kaldes da Legemets Potential med Hensyn til Punktet (a, β, γ). Befinder der sig i dette Punkt en Partikel med Massen 1, bestemmes Tiltrækningen ved:

$$X = \mu \frac{\delta V}{\delta a};\quad Y = \mu \frac{\delta V}{\delta \beta};\quad Z = \mu \frac{\delta V}{\delta \gamma}.$$

U er en Funktion af a, β og γ, og

$$U = \text{Konst.}$$

er derfor Ligningen for en vis Flade, en saakaldt Niveauflade. For Overgang til et konsekutivt Punkt paa denne Flade har man:

$$\frac{\delta U}{\delta a} da + \frac{\delta U}{\delta \beta} d\beta + \frac{\delta U}{\delta \gamma} d\gamma = 0,$$

altsaa:

$$X da + Y d\beta + Z d\gamma = 0,$$

der viser, at Tiltrækningens Resultant altid er normal paa den gennem Partiklen gaaende Niveauflade.

Er r Partiklens Afstand fra et fast Punkt (a, b, c), og sætter man:

$$a = a + r\cos\lambda;\ \beta = b + r\cos\varkappa;\ \gamma = c + r\cos\nu,$$

har man:

$$\frac{\delta U}{\delta r} = \frac{\delta U}{\delta a}\frac{\delta a}{\delta r} + \frac{\delta U}{\delta \beta}\frac{\delta \beta}{\delta r} + \frac{\delta U}{\delta \gamma}\frac{\delta \gamma}{\delta r}$$

$$= \frac{\delta U}{\delta a}\cos\lambda + \frac{\delta U}{\delta \beta}\cos\varkappa + \frac{\delta U}{\delta \gamma}\cos\nu,$$

der ved Multiplikation med $-\mu$ netop bliver Tiltrækningens Komposant i r's Retning; denne Komposant er derfor:

$$-\mu\frac{\delta U}{\delta r}.$$

111. Potentialfunktionen tilfredsstiller en partiel Differentialligning af anden Orden. For at vise dette, forudsætte vi først, at Punktet (a, β, γ) ikke ligger i Legemets Masse, saa at r ikke faar Værdien Nul. Funktionen under Integraltegnet er da ikke uendelig indenfor Integralets Grænser, og man kan differentiere V ved at differentiere under Integraltegnet; nu er:

$$\frac{\delta\frac{1}{r}}{\delta a} = \frac{x-a}{r^3};$$

$$\frac{\delta^2\frac{1}{r}}{\delta a^2} = \frac{-r^3 + 3(x-a)r^2\frac{x-a}{r}}{r^6} = \frac{-r^2 + 3(x-a)^2}{r^5};$$

det sidste Udtryk og de analoge for $\frac{\delta^2\frac{1}{r}}{\delta\beta^2}$ og $\frac{\delta^2\frac{1}{r}}{\delta\gamma^2}$ have Summen Nul, og man har altsaa:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta \beta^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta \gamma^2} = 0, \tag{50}$$

der gælder, hvorledes end Legemet er, naar blot (a, β, γ) ikke ligger i dets Masse; er dette derimod Tilfældet, kræves en nærmere Undersøgelse paa Grund af det uendelige Element. Vi kunne da dele Potentialet i to Dele, nemlig en Del, der hidrører fra en uendelig lille af Legemet udskaaret Kugle, der indeholder Punktet (a, β, γ), og en anden, der hidrører fra Resten af Legemet; for den sidste Del gælder Udviklingen ovenfor, saa at vi blot skulle undersøge den lille Kugle. For en saadan er ganske vist baade Potentialet og Tiltrækningen uendelig smaa, men derfor kunne disses Differentialkvotienter godt blive endelige.

Vi lægge da den lille Kugle med Centrum i et Punkt (a, b, c), som naturligvis ikke kan tænkes faldende sammen med det variable Punkt (a, β, γ). Kuglens Tiltrækning til dette Punkt har Komposanterne:

$$-\frac{4}{3}\mu\varrho\pi(a-a),\ -\frac{4}{3}\mu\varrho\pi(\beta-b),\ -\frac{4}{3}\mu\varrho\pi(\gamma-c),$$

og da disse Komposanter ere:

$$\mu\frac{\delta V}{\delta a},\ \mu\frac{\delta V}{\delta \beta},\ \mu\frac{\delta V}{\delta \gamma},$$

bliver:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2} = -\frac{4}{3}\pi\varrho = \frac{\delta^2 V}{\delta \beta^2} = \frac{\delta^2 V}{\delta \gamma^2}$$

og altsaa:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta \beta^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta \gamma^2} = -4\pi\varrho, \tag{51}$$

hvor ϱ er Legemets Tæthed i Punktet (a, β, γ), saa at denne Formel indbefatter den forrige.

112. Den fundne Egenskab ved Potentialfunktionen kan undertiden med Fordel benyttes til Potentialets Bestemmelse, naar man kender noget til den søgte Funktions Form. For at vise dette, ville vi ad denne Vej bestemme Tiltrækningen af en hul Kugle, hvor Tætheden er en Funktion af Afstanden fra Centrum. Man indser da, at Potentialet maa være en Funktion af:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

idet Centrum er taget til Begyndelsespunkt. Man har da:

$$\frac{\delta V}{\delta \alpha} = \frac{dV}{dr}\frac{\alpha}{r}; \quad \frac{\delta^2 V}{\delta \alpha^2} = \frac{d^2 V}{dr^2}\frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{dV}{dr}\frac{r^2 - \alpha^2}{r^3}$$

og de analoge, hvoraf:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta \alpha^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta \beta^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta \gamma^2} = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\varrho,$$

altsaa:

$$r^2\frac{d^2 V}{dr^2} + 2r\frac{dV}{dr} = -4\pi r^2 \varrho,$$

eller:

$$r^2\frac{dV}{dr} = -4\pi\int_0^r \varrho r^2\, dr,$$

hvor $\mu\frac{dV}{dr}$ er den søgte Tiltrækning, og den lavere Grænse for Integralet er Nul, da Partiklen aabenbart er i Ligevægt i Kuglens Centrum. Lade vi r vokse, vedbliver Integralet at være Nul, saalænge vi ere indeni den hule Kugle, hvor ϱ er Nul. Her er Tiltrækningen altsaa overalt Nul. Gaa vi videre ind i Massen, repræsenterer Størrelsen paa højre Side, paa Fortegnet nær, netop Massen af de passerede koncentriske Lag, og idet denne er M, faa vi for Tiltrækningen:

$$\mu\frac{dV}{dr} = -\mu\frac{M}{r^2},$$

stemmende med det tidligere fundne Resultat.

Anvendelser.

Den naturlige Tiltrækningslov er forudsat, hvor der ikke er givet en anden Lov.

124. Bevis, at et Legeme, naar Tiltrækningsloven er $\varphi(r) = r$, tiltrækker, som om Massen var samlet i Tyngdepunktet.

125. Bestem Tiltrækningen af en uendelig Plan, idet Enhed af Areal har Massen ϱ.

126. Et homogent Legeme er dannet ved, at det ene Øje af en Lemniskat har drejet sig om sin Symmetriakse. Find Tiltrækningen til en Partikel, der ligger i Spidsen.

127. Bestem Tiltrækningen af en uendelig homogen Cylinder, baade direkte og ved Hjælp af Potentialfunktionen.

128. Bevis, at Tiltrækningen af en homogen Linie AB til en Partikel P er rettet efter Halveringslinien af Vinklen APB.

129. Bestem Tiltrækningen af en tynd, homogen Plade af Form som en Cirkelring til en Partikel i Pladens Plan, naar $\varphi(r) = \frac{1}{r}$.

130. Til hvilken Flade maa en Partikel være bunden for at være i Ligevægt overalt paa denne under Paavirkning af Tiltrækning til to materielle Partikler med Masserne m og m_1?

131. Find Tiltrækningen af en homogen, ret Linie til en Partikel i et af Liniens Punkter.

TOLVTE KAPITEL.

Grafisk Statik.

Grafisk Sammensætning og Opløsning af Kræfter i samme Plan.

113. Ved Statikens praktiske Anvendelse er den Nøjagtighed, som kan opnaas ved Problemernes Løsning ad grafisk Vej, tilstrækkelig; da nu den grafiske Metode anvendes med stor Lethed i mange Tilfælde, hvor Problemets Løsning ved Regning vilde være besværlig, ville vi i det følgende give Grundtrækkene af Methoden, saaledes som den er sat i System, nạvnlig af Culmann.

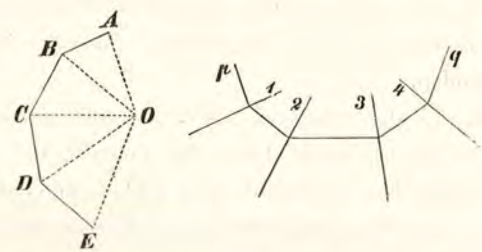
114. Vi have set, at Størrelsen og Retningen af flere Kræfters Resultant bestemmes ved den til Kræfterne hørende Kraftpolygon. Ere Linierne AB, BC, CD, ... GH lige store med og parallele med Kræfterne, repræsenteres Resultanten i Størrelse og Retning (men i Reglen ikke i Beliggenhed) af AH. Dette kan udtrykkes saaledes:

$$AB + BC + \ldots GH = AH,$$

hvor $+$ er benyttet som Tegn for den grafiske Addition. Dersom Kræfterne angribe samme Punkt, bliver Betingelsen for Ligevægt den, at Kraftpolygonen lukkes; angribe de ikke samme Punkt, viser den lukkede Kraftpolygon blot, at Kræfterne kunne reduceres til et Kraftpar. Ligesom man ved Kraftpolygonen sammensætter

Kræfterne, kan man ogsaa ved den opløse en Kraft i flere andre; særlig mærke vi os det Tilfælde, hvor en Kraft AB skal opløses i to andre med givne Retninger; man tegner da Trekanten ACB, hvis Sider AC og CB have de givne Retninger, og AB er derved opløst i to Kræfter, AC og CB. Ved Kraftpolygonen er det altid kun Kræfternes Størrelser og Retninger og ikke deres Beliggenhed, man har for Øje.

115. Tovpolygonen. Lad $ABCDE$ være en Kraftpolygon, der tilhører et System af Kræfter i samme Plan. Kræfterne ville vi betegne ved 1, 2, 3 og 4. Fra et vilkaarligt Punkt O (Polen) trække vi Linier til Kraftpoly-



gonens Vinkelspidser. Vi faa derved AB opløst i AO og OB, BC i BO og OC o. s. v. Ved denne Opløsning bliver altsaa den ene Komposant af enhver af Kræfterne lig og modsat den ene Komposant af den følgende Kraft.

Vi trække nu en brudt Linie, hvis Stykker ere parallele med de fra O udgaaende Linier, og som forbinder Kræfterne, som de virkelig ere beliggende i Planen. Den første Linie p er parallel med OA og ender i 1, men er forresten vilkaarlig; fra dens Endepunkt gaar en Linie til 2 parallel med OB o. s. v., indtil den sidste Linie q, parallel med OE, gaar ud fra et Punkt af 4. Nu kan, som vi saa ovenfor, enhver af Kræfterne opløses i to andre, der falde henad de to Linier, som udgaa fra et Punkt af Kraften. Vi saa tillige, at ved denne Opløsning ville stadig de to Kræfter, som falde paa samme Linie, hæve hinanden; det givne System af Kræfter er altsaa ved den angivne Konstruktion erstattet ved et System af to Kræfter, nemlig de to, p og q, der ere parallele med OA og OE. Resultanten af disse to gaar gennem deres Skæringspunkt; da den tillige er lig og parallel med AE, er den saaledes fuldstændig bestemt.

Den brudte Linie $p \ldots q$ kaldes den til Kræfterne hørende Tovpolygon. Paa samme Maade, som den bestemmer Beliggenheden af Resultanten af alle Kræfterne, bestemmer den, i Forbindelse med Kraftpolygonen, Resultanten af hvilke som helst af Kræfterne, naar disse blot følge efter hinanden.

116. Er der Ligevægt, bliver Kraftpolygonen lukket, og den første og sidste Linie fra Polen falde sammen. Kraftpolygonen kan imidlertid blive lukket, uden at der er Ligevægt, idet Tovpolygonen viser, at Systemet i dette Tilfælde reduceres til to Kræfter, der ere lige store og antiparallele. Skulle disse Kræfter holde hinanden i Ligevægt, maa de falde paa samme Linie, det vil sige, at Tovpolygonen ogsaa maa lukke sig. Finder dette ikke Sted er Kraftsystemet reduceret til et Kraftpar.

Ligevægtsbetingelsen for et plant Kraftsystem er altsaa, at saavel Systemets Kraftpolygon som dets Tovpolygon ere lukkede. Lukkes derimod kun Kraftpolygonen, reduceres Systemet til et Kraftpar.

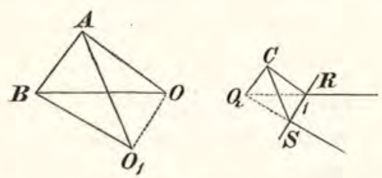
117. Den angivne Metode for Kræfters Sammensætning kan ogsaa anvendes paa parallele Kræfter. Anvendes den paa et Kraftpar, omformes dette til et andet

Kraftpar med samme Moment, men hvis Beliggenhed man forresten kan variere efter Behag, idet man kan vælge Polen saaledes, at den ene Kraft bliver, som man ønsker den. Danne to paa hinanden følgende Kræfter et Kraftpar, have de ingen Indflydelse paa de andre Stykker af Kraftpolygonen, medens de følgende Sider af Tovpolygonen ville forskydes parallelt. Resultantens Beliggenhed, men ikke dens Størrelse og Retning, afhænger af Kraftparret.

118. Tænker man sig et Systems Tovpolygon erstattet af en dermed sammenfaldende, virkelig Tovpolygon (eller Stangpolygon), hvis yderste Sider indeholde hver et fast Punkt, vil denne under Paavirkning af de givne Kræfter være i Ligevægt, thi enhver af dens Sider angribes, som Opløsningen viser, af to lige store og modsatte Kræfter. Linierne fra O i Kraftpolygonen bestemme altsaa Spændingerne i de enkelte Stykker. De to Kræfter, til hvilke Systemet reduceres, bestemme de faste Punkters Reaktioner.

119. Polens Forskydning. Da Beliggenheden af Polen er vilkaarlig, ville vi undersøge, hvilken Indflydelse en Flytning af Polen har paa Tovpolygonen.

Lad AB være en af Kræfterne, O og O_1 de to Poler. Da den med AB parallele Kraft 1 opløses, den ene Gang i de to Kræfter, der udgaa fra R, den anden Gang i de to, der udgaa fra S, maa de to sidste holde Ligevægt med de to første, tagne i modsatte Retninger. Flyttes



disse fire Kræfter, de to til C og de to til Q, maa Resultanten af de to i C og Resultanten af de to i Q være lige store og modsatte; begge Resultanterne maa derfor falde i Linien CQ. Paa den anden Side viser Kraftpolygonen, at Resultanten af de to Kræfter i C, nemlig OA og AO_1, er parallel med OO_1. QC er derfor parallel med OO_1.

Konstruere vi altsaa for et givet Kraftsystem de tilhørende Tovpolygoner for to forskellige Poler, ville Skæringspunkterne for de ensliggende Sider af Tovpolygonerne falde i samme rette Linie, parallel med de to Polers Forbindelseslinie.

Har man tegnet en Tovpolygon for et System af Kræfter, og ønsker man Polen flyttet, faar man ved denne Sætning en simpel Konstruktion af den anden Tovpolygon, idet man først tegner den Linie, paa hvilken de ensliggende Sider af de to Tovpolygoner skære hinanden. Den fundne Sætning kan ogsaa udtrykkes saaledes:

Dersom Polen glider paa en ret Linie L, og vi stadig lade den variable Tovpolygons første Side gaa gennem et fast Punkt M, ville alle Tovpolygonens Sider skære en med L parallel Linie gennem M i faste Punkter.

120. Vi saa ovenfor, at Resultanten af to ensliggende Spændinger i den variable Tovpolygon (den ene med modsat Retning) faldt paa den med L parallele Linie. De to Spændinger have derfor samme Moment med Hensyn til ethvert Punkt af denne Linie. Da Resultanten af to Kræfter er geometrisk Sted for de Punkter, med Hensyn til hvilke Summen af Komposanternes Momenter er Nul, vil omvendt den Linie, paa hvilken to Tovpolygoners ensliggende Sider skære hinanden, være bestemt, saasnart man kender et Punkt, med Hensyn til hvilket to ensliggende Spændinger, og et Punkt, med Hensyn til hvilket to andre ensliggende Spændinger have samme Moment; de to Punkter ligge nemlig begge i den søgte Linie. Derved er da tillige Retningen af den Linie, der forbinder de to Tovpolygoners Poler, bestemt. Heraf følger som specielt Tilfælde, at dersom to af en variabel Tovpolygons Sider gaa gennem faste Punkter a og b, gaar enhver af Siderne gennem et fast Punkt i ab, og Polen beskriver en med ab parallel Linie.

121. Af de Tovpolygoner, der svare til et givet Kraftsystem, mærke vi os navnlig den, hvis Pol ligger i det Punkt, hvor Kraftpolygonen begynder. OA (se Fig. til 115) bliver i saa Fald Nul. Da nu Kraftsystemet ved Tovpolygonen reduceres til to Kræfter, af hvilke den ene er OA, vil enhver Side i Tovpolygonen falde sammen med de forudgaaende Kræfters Resultant. Dennes Størrelse bestemmes ved Kraftpolygonen. Tovpolygonen kaldes i dette Tilfælde Kræfternes Middeltrykslinie.

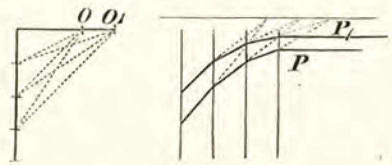
122. Systemer med nogle fælles Kræfter. Man ønsker ofte ved en Konstruktion at lade nogle af Kræfterne variere, medens de øvrige blive uforandrede. Vi tænke os derfor, at vi have konstrueret Tovpolygonen for et givet System, og at vi nu skulle have den ny Tovpolygon, som tilhører det ændrede System. Den Orden, i hvilken man tager Kræfterne i Kraftpolygonen, er vilkaarlig; tage vi nu i begge Tilfælde de ens Kræfter først, faa de to Tovpolygoner deres første Sider fælles, og Konstruktionen udføres forøvrigt som sædvanligt. Man har imidlertid i Praksis ofte en given Orden af Kræfterne, der ikke godt kan forandres. Vi ville derfor betragte det Tilfælde, hvor der først kommer nogle forskellige Kræfter (hvis Antal kan være forskelligt), men derpaa følger de samme Kræfter i de to Systemer.

Saalænge Kræfterne er forskellige, anvendes den sædvanlige Konstruktion; vi naa da den første fælles Kraft P i de to Tilfælde med de to Tovpolygoner f. Eks. i a og b. I Kraftpolygonen begynde de to Sider, der ere parallele med P, f. Eks. i C og C_1. De følgende Dele af Kraftpolygonerne, svarende til de fælles Kræfter, maa da ligge saaledes, at de ved en Parallelforskydning CC_1 bringes til at dække hinanden; ved denne Forskydning af den ene Polygon kommer Polen O hen i et nyt Punkt O_1; de to Dele af Tovpolygonerne, som udgaa fra a og b, blive da, som om de hørte til samme Kraftpolygon, men havde forskellige Poler; deres ensliggende Sider skære derfor hinanden paa samme rette Linie, parallel med OO_1; derved simplificeres Konstruktionen af den anden Polygon, naar den første er tegnet, idet dens Sider gaa gennem bekendte Punkter.

123. Middeltrykslinien i en Murbue. Vi ville anvende det udviklede paa en Murbue, af hvilken vi dog kun betragte den ene Halvdel, idet vi erstatte den anden Halvdel ved det horizontale Tryk, som den udøver paa den første Halvdel i dennes øverste Del. Dette horizontale Tryk er i Virkeligheden ubekendt og kan ikke bestemmes, men man gaar ud fra, at Buen vil blive staaende, dersom der eksisterer en saadan Størrelse og Beliggenhed af det horizontale Tryk, at den ved Hjælp af dette og de enkelte Deles Vægt konstruerede Middeltrykslinie falder helt indeni Murværket og ikke for nær til Yderkanten, idet Buen tænkes at ville synke lidt sammen, indtil Trykkene blive saadanne, at der bliver Ligevægt. Man maa derfor prøve

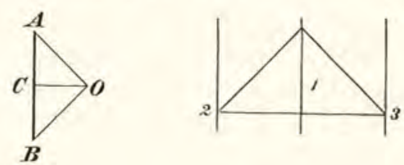
sig frem, idet man efterhaanden forudsætter forskellige horizontale Tryk, indtil man finder et, der giver en tilfredsstillende Middeltrykslinie; kan ingen saadan findes, maa den forudsatte Konstruktion forandres.

Figuren viser en saadan Halvdel af en Murbue; den er tænkt delt ved lodrette Snit, og de enkelte Deles Vægt tænkes virkende i deres Tyngdepunkter. Vi have da fire lodrette Kræfter, og Kraftpolygonen for disse og det vilkaarligt antagne horizontale Tryk P er tegnet; derved faas den til P svarende Middeltrykslinie, og denne er atter benyttet til Konstruktionen af den til et andet Tryk P_1 svarende Middeltrykslinie, idet den vandrette Linie, paa hvilken de ensliggende Sider af de to Middeltrykslinier skære hinanden, er tegnet.



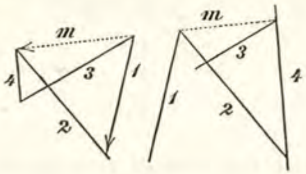
124. Kræfters Opløsning. Ved Hjælp af de to Polygoner kan en Kraft erstattes ved flere andre, saaledes at ogsaa Beliggenheden tages i Betragtning. Skal en given Kraft opløses i to andre med givne Retninger, maa de tre Kræfter skære hverandre i samme Punkt, og Krafttrekanten er tilstrækkelig til Opløsningen. Af særlig Interesse ere følgende to Tilfælde:

a) En Kraft 1 skal opløses i to med den parallele Kræfter, der falde paa Linierne 2 og 3. Man afsætter $AB = 1$, og Polen O vælges; nu kan Tovpolygonen 213 tegnes, og en Linie



fra O parallel med 2 3 vil da bestemme de to Komposanter CB og AC.

b) En Kraft skal oploses i tre andre, der falde paa givne Linier; disse maa da ikke skære hverandre i eet Punkt. Man forlænger den givne Kraft 1, til den skærer den ene af de givne Linier, 2, og opløser den nu i to, den ene paa den givne Linie, den anden, m, gennem de to andre givne Liniers Skæringspunkt; den sidste kan derpaa oploses i to, der falde paa de givne Linier. Kraftpolygonen 1243 er da konstrueret, idet en af Diagonalerne m som Hjælpelinie er benyttet ved Konstruktionen.



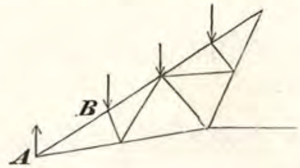
Er der givet flere end tre Linier, paa hvilke Komposanterne skulle falde, er Opgaven ubestemt.

125. Sammensatte Systemer. Ved Konstruktioner i Praksis bør man sørge for, at man kun benytter Materialernes Evne til at modstaa Strækning og Sammentrykning og ikke deres langt ringere Modstand mod Bøjning. Hvor en Bøjning vilde indtræde, understøtter man derfor ved ny Forbindelser; da Modstanden mod Bøjning er saa lille, kan man betragte Systemerne som leddede i saadanne Punkter (Knudepunkter).

Vi forudsætte, at de Systemer, vi betragte, netop have det Antal Forbindelser, som ere nødvendige for at gøre Systemet uforanderligt. Har det plane System n Knudepunkter, behøves der i Almindelighed $2n—3$ Stænger, thi et Punkts Koordinater og en Linies Retning kunne vælges vilkaarligt, og der mangler da $2n-3$ Bestemmelser.

I Reglen kan man let bestemme Underlagets Reaktioner og derfra gaa videre, til alle Spændinger ere bestemte.

Figuren forestiller Halvdelen af et Tag; Vægtene tænkes virkende i Knudepunkterne. Da Figuren tænkes symmetrisk, virker den halve Vægt af hele Taget i A. Tænke vi os et Snit gennem de to fra A udgaaende Stænger, faa vi fri Ligevægt, naar disses Spændinger føjes til; de bestemmes ved en Trekant, som ovenfor vist; vi kunne nu bestemme de to ubekendte Spændinger i B o. s. v. I Almindelighed kunne vi bestemme Spændingerne, naar vi gennem hele Systemet kunne lægge et Snit, der kun overskærer tre Stænger med ubekendte Spændinger, og forresten alle Spændinger og Kræfter paa den ene Side af Snittet ere bekendte. Denne Metode til efterhaanden at bestemme alle Tryk og Spændinger kaldes Snitmetoden.



TRETTENDE KAPITEL.

Om Diagrammet til et leddet System.

126. Vi ville antage, at vi have forelagt et System af Stænger, der ere forbundne med hinanden i visse Knuder. Paa alle eller nogle af Knuderne virke ydre Kræfter, der antages at være saadanne, at det hele Stangsystem er i Ligevægt. Stangsystemet kan forresten være plant eller vindskævt; det kan have saa mange Stænger, at det danner et geometrisk uforanderligt System, men det kan ogsaa have færre eller flere; dog maa i det sidste Tilfælde nogle af Stængerne opfattes som elastiske, saa at enhver Stang faar sin bestemte Spænding, der virker paa Stangens Endepunkter som Træk eller Tryk.

Naar Systemet er i Ligevægt, er enhver af Knuderne i Ligevægt. Alle de paa en saadan Knude virkende ydre Kræfter og Spændinger maa derfor have en lukket Kraftpolygon. Denne kan tegnes paa mange Maader, idet Sidernes Orden er vilkaarlig. Dersom man nu kan vælge denne Orden saaledes, at alle Knudernes Kraftpolygoner kunne samles i een Figur, hvor enhver ydre Kraft og Spænding kun findes een Gang, kaldes denne Figur Systemets D i a g r a m.

Diagrammet giver Anledning til en dobbelt Opgave, idet man nemlig dels maa undersøge, om der eksisterer et Diagram til et givet System, dels vise, hvorledes Dia-

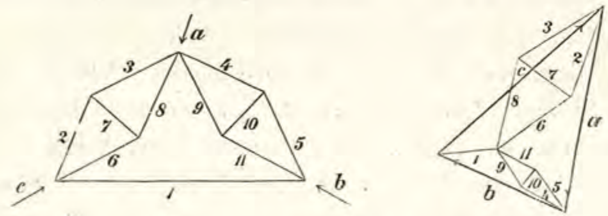
grammet konstrueres. Vi ville først beskæftige os med den første Opgave. Vi antage derfor, at et givet System har et Diagram, og søge deraf at udlede de for et saadants Eksistens nødvendige Betingelser.

127. Om Diagrammet vide vi altsaa følgende:

a) Det har lige saa mange Linier, som Systemet har Stænger og ydre Kræfter, og enhver af Linierne er parallel med en Kraft eller en Stang, hvis Spændings Størrelse den angiver.

b) Til enhver Knude i Systemet svarer i Diagrammet en lukket Polygon, der gennemløbes i en bestemt Retning, naar man følger Kræfter og Spændinger i den Retning, i hvilken de paavirke Knuden (altsaa imod Knuden ved Tryk, fra Knuden ved Træk). Disse Polygoner ville vi kalde Kraftpolygonerne, i Modsætning til andre lukkede Polygoner, som kunne opsøges i Diagrammet, men som ikke ere Kraftpolygoner for nogen enkelt Knude.

Figuren viser et Stangsystem, paavirket af tre ydre Kræfter, med tilhørende Diagram. I dette finder man de



lukkede Polygoner $c162$, 273, $a3894$ o. s. v., svarende til Systemets Knuder, medens f. Eks. den lukkede Polygon $381c$ ikke svarer til nogen Knude.

c) Enhver Linie i Diagrammet, der angiver en Spænding, er Side i to og kun i to af Kraftpolygonerne. Den tilsvarende Stang forbinder nemlig to og kun to Knuder, og Linien forekommer kun i disse to Knuders Kraftpolygoner. Linien har modsatte Retninger, eftersom den betragtes som tilhørende den ene eller den anden af Polygonerne, fordi Spændingen virker modsat paa Stangens to Endepunkter. Enhver ydre Kraft er kun Side i een Kraftpolygon, nemlig i den, der tilhører den Knude, som Kraften angriber.

128. At visse Kræfter a, b, c, . . . danne en lukket Polygon, ville vi udtrykke ved Ligningen

$$a + b + c + \ldots = 0,$$

hvor $+$ betegner den grafiske Addition. Danner man de analoge Ligninger for alle Knuderne, har man de nødvendige og tilstrækkelige Ligevægtsbetingelser, thi enhver af Ligningerne bestemmer Ligevægten for en af Knuderne, og naar alle Knuderne ere i Ligevægt, er hele Systemet i Ligevægt. Saaledes faa vi for Systemet ovenfor

$$c + 2 + 6 + 1 = 0; \quad \dot{2} + 7 + 3 = 0 \text{ o. s. v.,}$$

hvor 2 og $\dot{2}$ betegne den samme Spænding med modsatte Retninger, saa at $2 + \dot{2} = 0$. Opskrive vi disse Ligninger for alle Knuderne, vil enhver ydre Kraft kun findes i een Ligning, medens enhver Spænding findes i to Ligninger, een Gang med og een Gang uden Mærke. Adderer man de til visse af Knuderne A, B, C . . . svarende Ligninger, faar man en ny Ligning af samme Form, hvis statiske Betydning man let ser. Enhver Spænding i en Stang, der forbinder to af Knuderne A, B, C . . ., gaar nemlig bort ved Additionen, da den findes i to af Ligningerne, een Gang med og een Gang uden Mærke. Tilbage blive da de paa Knuderne A, B, C . . ., virkende ydre Kræfter og Spændingerne i de Stænger, der forbinde disse Knuder med Systemets øvrige Knuder. Den fundne Ligning udtrykker altsaa, at de Kræfter og Spændinger, der paavirke

A, B, C . . ., tagne som et System for sig, have en lukket Kraftpolygon, hvilket ogsaa er indlysende, da den Samling af Stænger, der forbinder A, B, C . . . indbyrdes, er i Ligevægt netop under Paavirkning af de i Ligningen indgaaende Kræfter og Spændinger. Saaledes faar man f. Eks., naar man adderer de to Ligninger ovenfor,

$$c + 6 + 1 + 7 + 3 = 0,$$

der ogsaa følger af, at Stangen 2 er i Ligevægt.

129. *De fra et Punkt i Diagrammet udgaaende Linier svare til Stænger, der danne en lukket Polygon.*

Lad fra et Punkt A udgaa Linier, som vi først ville tænke os alle ere Spændinger. En af disse, AB, er Side i to Kraftpolygoner, α og β. β maa da have endnu en Side, udgaaende fra A; lad denne være AC; den er Side i β og i en anden Kraftpolygon γ, der har en ny Side AD, og saaledes videre. Da man ikke kan blive saaledes ved i det uendelige, maa man engang komme til en Polygon, man har havt tidligere, og denne kan kun være α, da man af alle de andre har benyttet begge fra A udgaaende Sider. Til de saaledes fundne Polygoner svare i Stangsystemet visse Knuder, der ere forbundne ved de til AB, AC, AD . . . svarende Stænger, og da man kommer tilbage til den Knude, man gik ud fra, danne disse Stænger en lukket Polygon.

Muligvis har man ikke benyttet alle fra A udgaaende Linier, naar Polygonkredsen sluttes. De tilbageværende Linier benyttes da paa samme Maade, og man finder saaledes i Stangsystemet flere lukkede Polygoner, der svare til A. I dette Tilfælde betragte vi imidlertid A som sammensat af flere Punkter, der tilfældigvis falde sammen, og hvoraf hvert har sin tilsvarende lukkede Polygon i Stangsystemet.

Dersom en af de fra A udgaaende Linier er en ydre Kraft, kan Rækken af Polygoner først sluttes, naar man atter kommer til en ydre Kraft, thi saalænge man kommer til en Spænding, kommer man ogsaa til en ny Polygon. For at den opstillede Sætning skal gælde i alle Tilfælde, maa man derfor i Stangsystemet opfatte de ydre Kræfter som Stænger, der, naar de støde sammen i Diagrammet, ogsaa støde sammen i Systemet og derved lukke Polygonen.

For Tydeligheds Skyld skulle vi anvende dette paa Figuren og tage Spændingerne 3, 7, 8, der i Diagrammet støde sammen i eet Punkt. 3 er fælles Side for Kraftpolygonerne 372 og $3894a$; den sidste fortsættes med Siden 8, der er fælles for den og for 876, der fortsættes med 7, som er fælles for den og 372. Dermed er Kredsen sluttet, og Stængerne 3, 7 og 8 danne i Stangsystemet en lukket Polygon.

Betragte vi derimod det yderste Punkt tilvenstre i Diagrammet, kunne vi begynde med den ydre Kraft c, der hører til Kraftpolygonen $c162$; dennes anden Side er 1, der ogsaa hører til Kraftpolygonen $b1\ 11\ 5$, hvis anden Side er b. c, 1 og b danne nu i Stangsystemet en lukket Polygon, naar b og c opfattes som Stænger, der støde sammen.

130. Vi have saaledes bevist, at der ogsaa i Stangsystemet findes et Antal lukkede Polygoner, der svare enkeltvis til, hvad vi kunne kalde Diagrammets Knuder. Enhver Stang (og ydre Kraft) er Side i to og kun i to saadanne Polygoner, nemlig i dem, der svare til Endepunkterne af den tilsvarende Linie i Diagrammet. Vi have saaledes naaet vort første Resultat:

Et givet System har kun et Diagram, naar man i det kan finde et Antal af saadanne lukkede Polygoner, at enhver Stang (og Kraft) er Side i to og kun i to af Polygonerne. Vi ville nu derfor antage, at vi have et saadant Stangsystem, og undersøge, hvilke Betingelser der yderligere maa være opfyldte, for at et Diagram kan eksistere.

131. Lad os tænke os, at vi i Stangsystemet overskære en Stang (Kraft); den er fælles Side for to af de ovenfor nævnte Polygoner; vi overskære derpaa den fælles Side for den ene af disse Polygoner og en tredje Polygon og saaledes videre, til vi komme tilbage til den første Polygon; vi sige da, at vi have beskrevet en lukket Polygonvej. De til de overskaarne Stænger svarende Linier i Diagrammet maa følge efter hinanden i den samme Orden, i hvilken de ere overskaarne, thi naar en Stang er fælles for to Polygoner i Systemet, forbinder den tilsvarende Linie de to til Polygonerne svarende Knuder i Diagrammet; naar man i Systemet beskriver en lukket Polygonvej og altsaa kommer tilbage til den Polygon, man gik ud fra, maa man ogsaa i Diagrammet komme tilbage til den Knude, man gik ud fra. Til en lukket Polygonvej i Systemet maa derfor svare en lukket Polygon i Diagrammet.

Betragte vi f. Eks. Figuren, hvor Polygonerne ere de tre Firkanter, der ligge udenom den store Femkant (23451), og de fire Trekanter og en Femkant, der ligge indenfor, ere $c381$ de overskaarne Stænger for en lukket Polygonvej, og dertil svarer i Diagrammet en lukket Polygon, hvis Vinkelspidser ere de Knuder, der svare til Polygonerne i den lukkede Polygonvej.

132. Vi bevise nu let den omvendte Sætning: Dersom de ved enhver lukket Polygonvej overskaarne Stængers Spændinger (Kræfterne medregnede) have en lukket Kraftpolygon, eksisterer der et Diagram.

Vi kunne nemlig forsøge at konstruere et Diagram til et givet System, hvis Polygoner vi kende, og hvor alle Kræfter og Spændinger ere bekendte. Vi konstruere da først Kraftpolygonen til en af Knuderne. Den Orden, i hvilken denne Polygons Sider følge efter hinanden, kende vi, da den bestemmes ved den lukkede Polygonvej om Knuden; til denne Kraftpolygon føje vi nu paa samme Maade en ny Kraftpolygon, der har en Side fælles med den første, og saaledes videre, til alle Kraftpolygoner ere anbragte. Hvis der er et Diagram, er det nu konstrueret; er der intet, viser det sig ved, at de lige store Linier ikke overalt falde sammen. Lad den samme Spænding falde f. Eks. i AB og CD. Følge vi nu den Vej tilbage til vort Udgangspunkt, ad hvilken vi ere komne til AB, og derfra Vejen til CD, beskrive vi en aaben Polygon, da A og C ikke falde sammen; men den tilsvarende Polygonvej i Systemet maa være lukket, da AB og CD svare til samme Stang. Men naar Polygonvejen er lukket, skulle, ifølge vor Forudsætning, ogsaa de overskaarne ydre Kræfter og Spændinger danne en lukket Polygon; altsaa maa A og C falde sammen, og da dette gælder for ethvert Punkt, har man et Diagram.

Lad os f. Eks. for at konstruere Diagrammet i Figuren først afsætte c; for at komme til 6, kan man gaa Vejen c 2 6 eller c 3 7 6. Faldt nu 6 derved paa to forskellige Steder, blev Polygonen 3 2 7 aaben, men denne svarer i Systemet til en lukket Polygonvej; denne gaar fra Trekanten 7 3 8 ud i den ydre Trekant, derpaa ind i Trekanten 2 6 7 og endelig tilbage til den første Trekant.

133. Dersom enhver lukket Polygonvej skærer et Stykke af Systemet fuldstændig løst, er der et Diagram.

Det udskaarne Stykke er nemlig i Ligevægt under Paavirkning af de overskaarne Stængers Spændinger (herunder indbefattet de overskaarne ydre Kræfter), og disse have derfor en lukket Kraftpolygon. I Praksis forekomme næppe andre Stangsystemer end saadanne, hvor enhver lukket Polygonvej udskærer et Stykke fuldstændigt. Man kan imidlertid tænke sig Systemer, hvor dette ikke finder Sted. Stiller man f. Eks. to Systemer, der have Form af tresidede Prismer, det ene inden i det andet, og forbinder man Knuderne i hvert Par Endeflader ved tre Stænger, har man et saadant System, naar de Stænger, der støde sammen i et Hjørne, opfattes som ydre Kræfter. Dette Systems Polygoner ere iøjnefaldende. De tre yderste Sideflader give en lukket Polygonvej, men derved overskæres kun tre af de opretstaaende Kanter, saa at de to Dele ikke ere fuldstændig adskilte. Der kan derfor kun være et Diagram, hvis Spændingerne i de tre overskaarne Kanter ere i Ligevægt; dette finder i Almindelighed ikke Sted, men man kan tænke sig, at de ydre Kræfter have saadanne specielle Værdier, at det finder Sted. Er dette Tilfældet, kan Systemet behandles som sædvanligt.

134. Vi have ovenfor vist, at en ydre Kraft i Diagrammet i hvert af sine Endepunkter maa støde til en anden ydre Kraft; de ydre Kræfter danne derfor i Diagrammet een eller flere lukkede Polygoner.

Endvidere kunne vi vise, at de Kræfter, der i Diagrammet danne en lukket Polygon, virke i Systemet paa alle eller nogle af Vinkelspidserne af en lukket Polygon, og Kræfternes Orden er begge Steder den samme. Lad os nemlig betragte en lukket Polygon, dannet af ydre Kræfter i Diagrammet. Til hver Vinkelspids af denne svarer i Systemet en brudt Linie, der begynder med en ydre Kraft og ender med en anden, med hvilken den næste brudte Linie begynder (med modsat Retning) og saaledes videre. Borttages alle de ydre Kræfter, maa da en brudt Linie af Stænger blive tilbage.

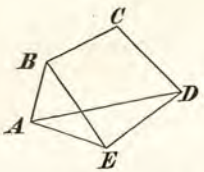
Paa Figuren danne saaledes *a*, *b* og *c* i Diagrammet en lukket Polygon; til dennes Vinkelspidser svare i Systemet Polygonerne $c\,2\,3\,a$, $a\,4\,5\,b$, $b\,1\,c$, der, naar Kræfterne borttages, give den lukkede Polygon $2\,3\,4\,5\,1$. Man ser let, hvilken Ændring Diagrammets Form vilde faa, dersom der ogsaa var ydre Kræfter paa de to Vinkelspidser af denne Polygon, hvor der ingen er.

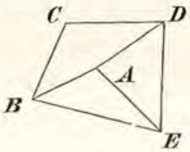
135. Vi have tilbage at besvare det Spørgsmaal: Hvorledes kan man i et givet Stangsystem finde de Polygoner, af hvilke enhver Stang er Side i to? Naar ingen Stænger danne Kors, er dette let nok, thi da ligge Polygonerne ved Siden af hinanden; i sammensatte Systemer kan Undersøgelsen derimod være vanskelig nok, og vi skulle derfor vise, hvorledes den kan udføres. Man ser let, at man kan udelade de ydre Kræfter, idet man i Stedet for de Polygoner, i hvilke disse ere Sider, kan sætte de lukkede Polygoner, hvis Vinkelspidser Kræfterne angribe. Kender man en saadan Polygon, benyttes den som Udgangspunkt. Kender man den ikke, maa man begynde med en vilkaarlig Polygon for at prøve, om den er en saadan, paa hvilken ydre Kræfter kunne anbringes.

Da det ikke kommer an paa Polygonernes Form, kunne vi tænke os den første afsat omtrent som regulær. Vi opsøge nu en brudt Linie, der forbinder to af Polygonens Vinkelspidser, og afsætte denne uden at bryde os om dens virkelige Form, tværs over den ideale Polygon, vi have tegnet. Derved er denne delt i to, hvoraf enhver bestaar af den brudte Linie og en Del af den første Polygon. Disse Polygoner deles nu videre paa samme Maade, idet de ideale Linier trækkes saaledes, at de ogsaa dele Arealet i to Dele; man maa blot undgaa at forbinde to Vinkelspidser, der begge ere Vinkelspidser i de samme to Polygoner, da man i saa Fald ikke ved hvilken af disse Polygoner, man har delt.

Denne Fremgangsmaade grunder sig paa, at en lukket Polygon i Systemet svarer til en lukket Polygonvej i Diagrammet. Ved en saadan deles Diagrammet i to adskilte Dele, og idet Delingen fortsættes, faar man tilsidst Diagrammets Knuder liggende hver for sig, men naar dette er Tilfældet, har man i Systemet netop de søgte Polygoner.

Muligheden af Diagrammet beror da paa, at man kan gennemføre Delingen. Umuligheden viser sig derfor ved, at man i den ideale Figur ikke kan undgaa Linier, der gaa over Kors. (Vi bortse her fra det i 133 nævnte specielle Tilfælde.) Kan den ideale Figur tegnes, behøver man ingen videre Undersøgelse, da det er iøjnefaldende, at enhver lukket Polygonvej skærer et Stykke løst. Ydre Kræfter kunne da anbringes paa Vinkelspidserne af den ydre Polygon og ogsaa paa indre, naar hvert Sæt for sig er i Ligevægt.





Lad os f. Eks. betragte Femkanten *ABCDE* med Diagonalerne *AD* og *BE*. Begynder man med Femkanten, kan den første Deling udføres ved en af Diagonalerne, men den næste Diagonal deler ingen af de to Polygoner, vi nu have. Et Diagram er derfor umuligt, naar Kræfter anbringes paa Femkantens fem Vinkelspidser. (Opfattes Diagonalernes Skæringspunkt som en Knude, er et Diagram muligt). Gaa vi derimod ud fra Firkanten *BCDE*, faa vi en ideal Figur, der viser, at ydre Kræfter kunne anbringes paa denne Firkant.

136. Diagrammets Konstruktion. I det foregaaende have vi forudsat, at alle Spændinger vare bekendte. I Praksis konstruerer man imidlertid Diagrammet netop for at finde Spændingerne. Der er her en Konstruktionsopgave at løse og det en, som ikke altid kan løses ved Passer og Lineal. I Praksis forekomme imidlertid næppe andre Tilfælde end saadanne, i hvilke Opgaven kan løses. Vi skulle nu omtale disse.

Vi tænke os da, at vi have bestemt Systemets Polygoner og tegnet en lukket Kraftpolygon af ydre Kræfter. Dersom der nu er Knuder, paavirkede af ydre Kræfter, og fra hvilke kun to Stænger udgaa, kan man straks tegne de til disse svarende Spændinger, idet man kender deres Retninger og ved, at Knuden har en lukket Kraftpolygon. Idet disse Spændinger nu ere blevne bekendte, kan man opsøge andre Knuder, der nu kun have to ubekendte Spændinger, og som oftest vil man ved at fortsætte paa denne Maade faa Diagrammet konstrueret.

Diagrammet ovenfor (Pag. 131) kan ikke konstrueres paa denne Maade, fordi der fra hver Knude udgaar mindst tre Stænger; her bemærker man imidlertid, at Systemet bestaar af Stangen 1 og to sammensatte Stangsystemer, der hvert for sig er uforanderligt (3 8 7 2 6 og 4 9 10 5 11). Disse to kunne tænkes erstattede ved enkelte Stænger, saa at man faar en Trekant, hvis Vinkelspidser angribes af Kræfterne a, b og c. Til dette System kan Diagrammet let tegnes; det bestaar af Trekanten abc og tre i eet Punkt sammenløbende Linier, udgaaende fra Vinkelspidserne og parallele med 1, α og β, hvor α og β ere de indførte Hjælpestænger. Spændingen α kan nu opfattes som repræsenterende to lige store og modsatte Kræfter, der holde Systemet 3 8 7 2 6 i Ligevægt, og dettes Diagram kan da tegnes; paa samme Maade erstattes β i Diagrammet ved 9 4 11 5 10, og man er færdig.

Man kunde ogsaa gaa saaledes frem: Trekanten abc tegnes, og Linierne 1, 3, 2, 5, 4 kunne trækkes i de rigtige Retninger, medens deres Størrelser ere ubekendte. Opgaven er nu reduceret til den, at tegne en Trekant (8 7 6 eller 9 10 11), hvis Sider ere parallele med givne Linier (Stængerne i Systemet) og hvis Vinkelspidser falde i bekendte Linier (1, 3, 2 eller 1, 4, 5). Denne Opgave løses let ved Ligedannethedsmetoden. Man tegner 7, 8, 6 i de rigtige Retninger, saa at Endepunkterne af 7 falde paa 3 og 2, men forresten vilkaarligt. Den Trekant, man nu har tegnet, er ligedan beliggende med den søgte med Skæringspunktet af 3 og 2 som Fællespunkt. En Linie gennem dette Punkt og Skæringspunktet af 8 og 6 skærer 1 i det søgte Punkt.

Her var blot en Trekant at anbringe med sine Vinkelspidser paa tre rette Linier, men undertiden kan man komme til følgende Opgave: At lægge en Polygon, hvis Sider have bekendte Retninger, saa at Vinkelspidserne falde i bekendte Linier.

For at løse denne Opgave, lægger man en af Vinkel spidserne A i et vilkaarligt Punkt af den Linie, i hvilken den skal falde, og tegner sin Polygon. Kommer man derved tilbage til sit Udgangspunkt A, er Opgaven løst, men da Udgangspunktet maa antages valgt urigtigt, vil man i Reglen komme tilbage til et andet Punkt, A_1. Man gør nu en lignende Prøve med et andet Udgangspunkt, B, og kommer tilbage til B_1. Drejes nu Stykkerne AB og $A_1 B_1$ om A og B i samme Omdrejningsretning til de parallele Stillinger AC og $A_1 C_1$, vil CC_1 skære Linien i det søgte Punkt. Dette maa nemlig ligge saaledes, at det deler AA_1 og BB_1 i samme Forhold. (Tre Paralleler afskære proportionale Stykker paa Linier, der skære dem).

INDHOLD.